RESUMEN DE VECTORES

Un vector fijo $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ es un **segmento orientado** que va del punto A (**origen**) al punto B (**extremo**).

ELEMENTOS DE UN VECTOR:

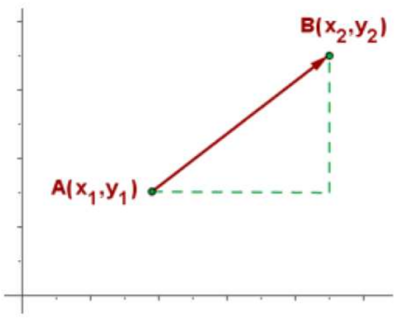
Dirección de un vector: La dirección del vector es la dirección de la recta que contiene al vector o de cualquier recta paralela a ella.

Sentido de un vector: El sentido del vector $\overrightarrow{AB}$ es el que va desde el origen A al extremo B.

Módulo de un vector: El módulo del vector es la longitud del segmento $\overline{AB}$, se representa por $|\overrightarrow{AB}|$ El módulo de un vector es un número siempre positivo o cero.

Componentes de un vector

Si las coordenadas de los puntos A y B son $A(x_1,y_1)$ y $b(x_2,y_2)$, entonces las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ se calculan restando a las coordenadas del origen a las del extremo, es decir:



$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1 , y_2-y_1)$

Ejemplo 1: A(3,-5) y B(2,1) → $\overrightarrow{AB}$ =(2-3,1-(-5))=(-1,6)

CLASES DE VECTORES:

Vectores equipolentes: dos vectores son equipolentes entre sí, si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

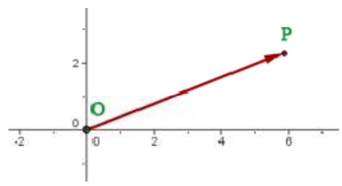
El conjunto de todos los **vectores equipolentes** entre sí se llama **vector libre**. Es decir los v**ectores libres** tienen el mismo **módulo**, **dirección** y **sentido**.

Vectores fijos: Un vector fijo es un representante del vector libre.

Vectores opuestos: Dos vectores son opuestos entre sí, cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y distinto sentido (sus componentes son iguales y de signo contrario).

Vectores unitarios: Un vector se dice unitario cuando su módulo es la unidad, es decir: $|\overrightarrow{AB}| = 1$.

Vector de posición: El vector $\overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas O (0,0) con el punto P(x,y), se llama vector de posición del punto P y sus componentes coinciden con las coordenadas del punto P.



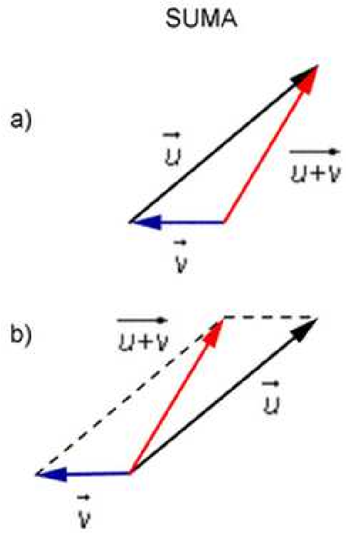
Vectores ortogonales: Dos vectores son ortogonales si son perpendiculares, es decir si forman un ángulo de 90º.

Vectores ortonormales: Dos vectores son ortonormales, si además de ser ortogonales, son unitarios.

OPERACIONES CON VECTORES

SUMA:

Gráficamente: Para sumar dos vectores libres se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector. La suma es el vector que va desde el origen del primer vector hasta el extremo del segundo vector.



También se puede utilizar la regla del paralelogramo.

Se colocan los dos vectores con un origen común y desde el extremo de cada vector, se trazan rectas paralelas al otro. La suma de los vectores es el vector que coincide con la diagonal del paralelogramo que se ha formado.

Analíticamente: La suma de dos vectores es otro vector cuya componente **x** es la suma de las componentes **x** del los vectores y cuya componente **y** es la suma de las componentes **y**. Si $\vec{u} = (u_x , u_y)$ y $\vec{v} = (v_x , v_y)$ entonces:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x , u_y + v_y)$$

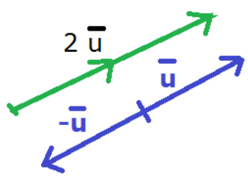
Ejemplo 2: $\vec{u}=(-3, 1)$; $\vec{v}=(2,4) \rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(-1,5)$

RESTA: Para restar $\vec{u}-\vec{v}$, lo que hacemos e sumar a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$

si $\vec{v}=(2,4)$ su opuesto será: $-\vec{v}=(-2,-4)$

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR: El producto de un número k por un vector u es otro vector:

- De igual dirección que el vector $\vec{u}$.
- Del mismo sentido que el vector $\vec{u}$ si k es positivo.
- De sentido contrario del vector $\vec{u}$ si k es negativo.



·Analíticamente: Sea $\vec{u} = (u_x , u_y)$ y k un número real, el producto $k\cdot\vec{u}$ es:

$$k\cdot\vec{u} = (k\cdot u_x , k\cdot u_y)$$

Ejemplo 3: $\vec{u} = (3 , -2)$ y k=5; $k\cdot\vec{u} = (15, -10)$

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Una combinación lineal de dos o más vectores es el vector que se obtiene al sumar esos vectores multiplicados por sendos escalares. Es decir una expresión de la forma:

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + \cdots\cdots + k_n\vec{u}_n \qquad k_i \in \mathbb{R}$$

diremos entonces, que el vector $\vec{v}$ se puede expresar como combinación lineal de los otros vectores.

Ejemplo 4: El vector $\vec{v} = (3,-2)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1(2,3)$ y $\vec{u}_2$ (1,8) ya que

(2,3) = 2(2,3)-(1,8); con $k_1=2$ y $k_2=-1$

VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Diremos que un conjunto de vectores son **linealmente independientes** si la única combinación lineal posible de ellos es con todos los escalares nulos, es decir, ninguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

Diremos que un conjunto de vectores son **linealmente dependientes** si existe una combinación lineal de ellos en la que algún (o todos) escalar es distinto de cero, es decir, alguno de los vectores se puede poner como combinación lineal de los demás.

Dos vectores del plano son **linealmente dependientes** si, y sólo si, son **paralelos** es decir, si sus componentes son proporcionales.

Dos vectores del plano son **linealmente independientes** si tienen distinta dirección es decir si sus componentes no son proporcionales.

En el plano (V^2), cualquier conjunto de más de dos vectores es linealmente dependiente.

En el espacio (V^3), cualquier conjunto de más de tres vectores es linealmente dependiente.

BASE DE UN CONJUNTO DE VECTORES

Diremos que un conjunto B de vectores de V^2 (de V^3), es una **Base** si se verifica que:

- Los vectores de B son linealmente independientes.
- Cualquier vector de V^2 (de V^3), se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base B

Sea el conjunto $B=\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de V^2 y sea el vector $\vec{w} \in V^2$. Llamamos:

COORDENADAS DE $\vec{W}$ RESPECTO DE LA BASE B al par ordenado (a, b) que verifica:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \qquad \text{con a,b números reales}$$

Ejemplo 5: En el ejemplo 4, los vectores $\vec{u}_1(2,3)$ y $\vec{u}_2$ (1,8) forman una base de V^2 y $k_1=2$ y $k_2=-1$ son las componentes del vector $\vec{v} = (3,-2)$ respecto a la base $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es decir, respecto a esa base, las componentes de $\vec{v}$ son: $\vec{v} = (2,-1)$.

Tal y como hemos definido una base, queda claro que en V^2 hay infinitos conjuntos de dos vectores que son Base y por tanto, un mismo vector, tiene infinitas componentes dependiendo de la base a la que lo refieras. Para simplificar los cálculos, utilizaremos Bases Ortonormales (cuyos vectores son ortonormales) y en particular la

BASE CANÓNICA de $V^2 \rightarrow B=\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ con $\vec{e_1}=(1,0)$ y $\vec{e_2}=(0,1)$

Cuando las componentes de un vector $\vec{v}$ están referidas a la Base Canónica, se llaman coordenadas cartesianas del vector $\vec{v}$. En ese caso el **módulo** del vector $\vec{v}\,(x,y)$ vendrá dado por:

$$|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Dados dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ de V^2, llamamos **Producto escalar** de $\vec{\mathbf{u}}$ por $\vec{\mathbf{v}}$ y lo denotamos como $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ **,** al número real obtenido mediante la expresión:

- $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \cos\alpha$ siendo α el ángulo que forman los dos vectores

Ejemplo 6: Si $\vec{u}=(3,0)$ y $\vec{v}=(5,5)$; $\alpha=45º$, entonces:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=\left(\sqrt{9+0}\right)\left(\sqrt{25+25}\right)\cos 45º=3\cdot\left(\sqrt{50}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\cdot 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=15$$

Cuando las componentes de los vectores están referidas a la base canónica, la expresión anterior queda de la siguiente forma:

- $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}$

ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES: Es el menor de los ángulos que determinan entre sí. Utilizando la expresión analítica del producto escalar tenemos:

- $$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\left(\sqrt{u_x^2+u_y^2}\right)\cdot\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)}$$

Ejemplo 7: con los mismos vectores del ejemplo 6, calculamos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\left(\sqrt{u_x^2+u_y^2}\right)\cdot\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)}=\frac{3\cdot5+0\cdot5}{\left(\sqrt{9}\right)\left(\sqrt{50}\right)}=\frac{15}{3\cdot5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\alpha=45º$$

De esta manera, podemos ver que si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es cero. Y viceversa, si su producto escalar es cero, los vectores son perpendiculares. Es decir:

- $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$

Proyección escalar: Se denomina: "proyección escalar del vector $\vec{\mathbf{v}}$ sobre la dirección del vector $\vec{\mathbf{u}}$ a la longitud del segmento p asociado a un signo: positivo o negativo, que indicará si la proyección coincide (figura 1) o no (figura 2) con el sentido que tiene el vector sobre el cual proyectamos ortogonalmente.

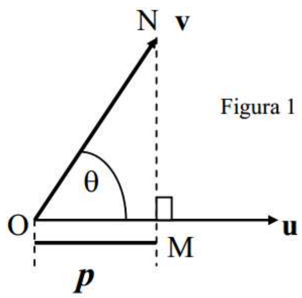


Figura 1

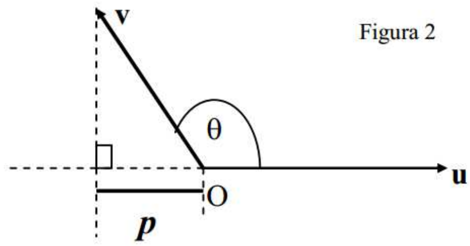


Figura 2

Interpretación geométrica del producto escalar

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, es decir:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$

pero $|\vec{u}| \cdot \cos \alpha = \overline{OA'}$, por lo que:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \overline{\mathbf{OA'}}$$