PROBABILIDAD

Definición axiomática:

Sea *E* el espacio muestral de cierto experimento aleatorio. La ***Probabilidad*** de cada suceso es un número que verifica:

1) Cualquiera que sea el suceso *A*, $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.
2) Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades.

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

3) La probabilidad total es 1. $P(E) = 1$.

Definición de Laplace.

Laplace define la probabilidad del suceso *A* como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el suceso *A* en el experimento y el número de resultados posibles del experimento.

- $$\boxed{P(A) = \frac{n^o \quad de \quad casos \quad favorables \quad a \quad A}{n^o \quad de \quad casos \quad posibles}}$$

<u>Ejemplo1</u>:

En el experimento de lanzar dos monedas al aire, hallar la probabilidad de que al salgan dos caras.

Casos posibles: (cc, cx, xc, xx); Casos favorables: (cc)

$$P(2 \text{ caras}) = \frac{1}{4}$$

<u>Ejemplo 2</u>:

Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

a) Un número par
b) Un múltiplo de tres.
c) Mayor que 4.

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

a) $P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; b) $P(\dot{3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ c) $P(>4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

<u>Propiedades de la probabilidad</u>

1) La suma de las probabilidades de un suceso y su complementario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso complementario es:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2) $P(E) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) Si $A \subset B$ entonces: $P(A) \leq P(B)$

5) Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son sucesos incompatibles dos a dos, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_K) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots\cdots + P(A_K)$$

6) Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ entonces:

$$P(S) = P(x_1) + p(x_2) + P(x_3) + \cdots + P(x_n)$$

Ejemplo 3:

En una ciudad existen dos periódicos A y B. El 50% de sus habitantes son lectores del diario A y el 30% del diario B. Un 20% de ciudadanos leen ambos periódicos. Se elige un ciudadano al azar. Calcula la probabilidad de que dicho ciudadano:

a) Sea lector de algún periódico
b) Lea solamente el diario A.
c) No lea la prensa
d) Lea solamente uno de los diarios.

Suceso A= {el ciudadano lee el diario A} $\rightarrow$ p(A)=0,5
Suceso B= {el ciudadano lee el diario B} $\rightarrow$ p(B)=0,3
Hay ciudadanos que leen ambos periódicos $\rightarrow$ $p(A \cap B) = 0{,}2$

a) Ser lector de algún diario: nos sirve leer A o leer B o ambos por lo que nos piden la probabilidad de la unión

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$ 0,5+0,3-0,2= **0,6**

b) Leer sólo el diario A

Probabilidad de leer A y no leer B: $p(A - B) = pA) - p(A \cap B)$ =0,5-0,2=**0,3**

c) p(No leer prensa)= 1-p(leer algún diario) = 1-0,6=**0,4**

d) leer A y no leer B o leer b y no leer A, es decir: (A-B)$\cup$(B-A) siendo ambos sucesos incompatibles.

$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$ =0,5-0,2=**0,3**

$p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$ **=**0,3-0,2=**0,1**

Por lo que: p [(A-B)$\cup$(B-A)]=0,3+0,1=**0,4**

Se llama **probabilidad** del suceso A **condicionada** al B y se representa por **P(A/B)** a la **probabilidad del suceso A, sabiendo que ha ocurrido el suceso B**.

- $\boxed{P\left(A/B\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Ejemplo 4:

Calcula la probabilidad de obtener un 6 al tirar un dado, sabiendo que ha salido par.

$$p\left(6/par\right) = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5:

En una clase hay 20 alumnas y 10 alumnos. El 30% de las alumnas son rubias y el 20% de los alumnos son rubios. Tomamos un alumno al azar, sabiendo que es rubio, calcula la probabilidad de que sea alumna.

A=(ser rubio)
B=(ser alumna)

P(A)= $\dfrac{n^o \quad de \quad rubios}{n^o \quad de \quad alumnos} = \dfrac{6+2}{30} = \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$

P(A$\cap$B)= $\dfrac{6}{30}$ P(B)=

$$p\left(B/A\right) = \frac{6/30}{8/30} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- Llamamos **sistema completo de sucesos** a una familia de sucesos $A_1, A_2, ..,A_n$ que cumplen:

1) Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \varnothing$
2) La unión de todos ellos es el suceso seguro, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

Teorema de la probabilidad total

Sea $A_1, A_2, ...,A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$\boxed{P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Ejemplo 5:

Tenemos dos urnas con la misma probabilidad de ser elegidas: la primera tiene 3 bolas rojas, 3 blancas y 4 negras; la segunda tiene 4 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

$P(B) = P(U1)\cdot P\left(B/_{U1}\right) + P(U2)\cdot P\left(B/_{U2}\right)$

P(U1)= $\frac{1}{2}$ =P(U2); $P\left(B/_{U1}\right) = \frac{3}{10}$; $P\left(B/_{U2}\right) = \frac{3}{8}$

P(B)= $= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} = \frac{27}{80}$

Teorema de Bayes:

Sea $A_1, A_2, ...,A_n$ un sistema completo de sucesos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquier del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$. entonces la probabilidad $P(A_i/B)$ viene dada por la expresión:

$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n)\cdot P(B/A_n)}}$$

Ejemplo 6:

En el ejemplo 5: Sabiendo que la bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la primera urna?

$$P\left(U1/_{B}\right) = \frac{P(U1)\cdot P\left(B/_{U1}\right)}{P(B)} = \frac{3/20}{27/80} = \frac{4}{9}$$

En los problemas relacionados con la probabilidad, y en particular con la probabilidad condicionada, así como con la probabilidad total y el teorema de Bayes, es aconsejable organizar la información del problema, en una tabla de contingencia o un diagrama de árbol.

Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las posibilidades, acompañada de su **probabilidad**.

En el final de cada rama parcial se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final).

Hay que tener en cuenta: que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

Ejemplo 7:

Una compañía de seguros hace una investigación sobre la cantidad de partes de siniestro fraudulentos presentados por los asegurados. Clasificando los seguros en tres clases, incendio, automóvil y "otros", se obtiene la siguiente relación de datos:

El 6% son partes por incendio fraudulentos; el 1% son partes de automóviles fraudulentos; el 3% son "otros" partes fraudulentos; el 14% son partes por incendio no fraudulentos; el 29% son partes por automóvil no fraudulentos y el 47% son "otros" partes no fraudulentos.

a) Haz una tabla ordenando los datos anteriores y hallando el porcentaje total de partes fraudulentos y no fraudulentos.

b) Calcula qué porcentaje total de partes corresponde a la rama de incendios, cuál a la de automóviles y cuál a "otros". Añade estos datos a la tabla.

c) Calcula la probabilidad de que un parte escogido al azar sea fraudulento. ¿Cuál será, en cambio, la probabilidad de que sea fraudulento si se sabe que es de la rama de incendios?

a,b)

	Incendio	Automóvil	Otros	Total
Fraudulentos	6	1	3	10
No fraudulentos	14	29	47	90
Total	20	30	50	100

c) Es fácil ver sobre la tabla que la probabilidad de escoger al azar un parte fraudulento es del 10%.

La probabilidad condicionada que se pide es: **P(FRAUDE/INCENDIO)=6/20=0.3**

Ejemplo 8

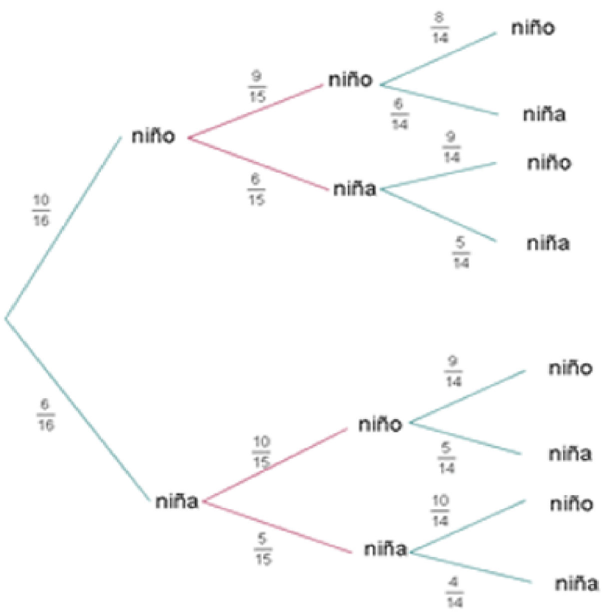
Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

a) Seleccionar tres niños.

b) Seleccionar exactamente dos niños y una niña

c) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

d) Seleccionar tres niñas.



Sol:

a) p (3 niños)$=\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}=$**0,214**

b) p (2niños y 1 niña)$=\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}+$

$+\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}+\frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}$ **=0,482**

c) p (2 niñas y 1 niño)= $\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{14}$ =**0,268**

e) p (3 niñas)= $\frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}$ =**0,0357**

EJERCICIOS

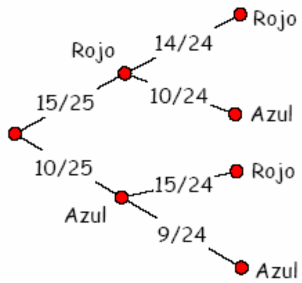
1º) Un estuche contiene 15 lápices de color rojo y 10 de color azul.
a) Si elegimos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo?
b) Si extraemos dos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean azules?
c) Si elegimos dos, calcular la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo rojo.

Sol:

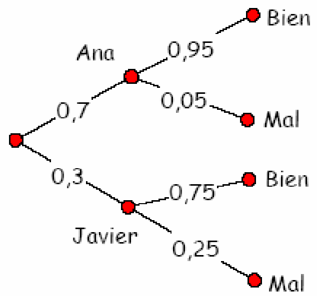
a) P(R)= $\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

b) P(AyA)= $\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}=\frac{3}{20}$

c) P(1ºAy 2ºR)= $\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24}=\frac{1}{4}$



2º) Un restaurante tiene contratados a dos camareros (Javier y Ana) para atender el servicio de comedor. Ana pone el servicio el 70% de los días y se confunde al colocar la cubertería sólo el 5% de los días. Javier, por el contrario, coloca mal alguna pieza el 25% de los días que pone el servicio.
a) Esta mañana, el encargado del restaurante va a pasar revista al servicio; ¿cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mál colocado?
b) Por desgracia, el encargado encontró unos cubiertos mal ubicados y desea conocer la probabilidad de que haya sido Javier.



a) $p(mal) = P(Ana)\cdot P\left(mal/_{Ana}\right) + P(Javier)\cdot P\left(mal/_{Javier}\right) =$
$= 0,7\cdot 0,05 + 0,3\cdot 0,25 = 0,11$

b) $P\left(Javier/_{mal}\right) = \frac{P(Javier)\cdot P\left(mal/_{Javier}\right)}{P(mal)} = \frac{0,3\cdot 0,25}{0,11} = 0,681$

3º) De dos sucesos A y B sabemos que:
P($\overline{A}$) = 0,48; P(A$\cup$B)= 0,82 y P(B) =0,42

a) ¿Son A y B independientes?
b) ¿Cuánto vale P(A / B)?

Sol:

a) P(A)=1-0,48=0,52

P(A$\cup$B)=P(A)+P(B)-P(A$\cap$B)$\Rightarrow$P(A$\cap$B)= 0,52+0,42-0,82=0,12
P(A)·P(B)=0,52·0,42=0,2184$\neq$ P(A$\cap$B)$\Rightarrow$No son independientes

b) P(A/B)= $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,12}{0,42}=0,29$