

## EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019

**Ejercicio 1:** Dada la función  $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$  se pide:

- Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f(x)$ .
- Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de  $f(x)$ .
- Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de  $f(x)$ .
- Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de  $f(x)$ , el eje de abscisas y las rectas  $y = x + 2$ ,  $x = 1$ .

**Ejercicio 2:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{2x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  donde  $\ln x$  significa logaritmo neperiano de  $x$ , se pide:

- Determinar el valor de  $k$  para que la función sea continua en  $\mathbf{R}$ .
- Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Obtener la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

**Ejercicio 3:** Hallar: a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right)^{25}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{\frac{2}{x^3}}$

**Ejercicio 4:** Dada la función  $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$ , donde  $\ln$  es logaritmo neperiano, se pide:

- Determinar el dominio de definición de  $f(x)$  y las asíntotas verticales de su gráfica.
- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .

**Ejercicio 5** Dadas las funciones:  $y = 9 - x^2$        $y = 2x + 1$  se pide:

- Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
- Calcular el área de dicho recinto acotado.
- Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje  $OX$  el recinto acotado por la gráfica de  $y = 9 - x^2$  y el eje  $OX$ .

**Ejercicio 6:** Calcular los límites: a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{\frac{a}{x}}$

**Ejercicio 7:** Calcular: a)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$       b)  $\int_0^1 x \cos x dx$

**Ejercicio 8:** Calcular el valor de  $a$  para que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-3}{x^2+3} \right)^{ax^2} = 4$

**Ejercicio 9:** Calcular: a)  $\int_{14}^{16} (x-15)^8 dx$       b)  $\int_9^{11} (x-10)^{19} (x-9) dx$

## EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019

**Ejercicio 10:** Dada la función  $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$  se pide:

- Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de  $f(x)$ .
- Estudiar y obtener sus asíntotas

**Ejercicio 11:**

- Calcular la integral  $\int_1^3 x\sqrt{4 + 5x^2} dx$
- Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de  $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$

**Ejercicio 12:**

- Hallar el límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \right)$
- Demostrar que la ecuación  $4x^5 + 3x + m = 0$  sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número  $m$ . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan

**Ejercicio 13:** Dada la función  $f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$  se pide:

- Determinar el valor de "a" para que la función tenga un mínimo relativo en  $x = 1$ .
- Hallar las asíntotas de  $f(x)$  para  $a = 1$ .

**Ejercicio 14:**

- Calcular los límites:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$
- Calcular la integral  $\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2} dx$
- Hallar el dominio de definición de  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$ . Hallar el conjunto de puntos donde  $f$  tiene derivada

**Ejercicio 15:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$  Hallar el valor de  $k$ , para que sea continua en  $x = 0$

**Ejercicio 16:**

- Hallar el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de  $f(x) = -\sin x$  y el eje  $OX$  entre las rectas  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$
- Hallar el volumen del sólido de revolución generado por la gráfica de  $f(x) = -\sin x$  alrededor del eje  $OX$  entre las rectas  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$

**Ejercicio 17:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$  se pide:

- Determinar el valor de  $A$  para que la función sea continua en  $\mathbf{R}$ . ¿Es derivable para dicho valor?

## EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019

b) Hallar los puntos que anulan su derivada.

c) Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de  $f(x)$  en el intervalo  $[4, 8]$

**Ejercicio 18:** Dada la función  $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ , se pide:

a) Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación  $f(x) = 0$  tiene alguna solución en el intervalo abierto  $(\pi/2, \pi)$ .

b) Calcular la integral de  $f$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .

c) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto  $(\pi, f(\pi))$ .

*Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.*

**Ejercicio 19:** Dada la función  $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$  se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 2$

b) Estudiar y obtener sus asíntotas.

**Ejercicio 20:** Calcular las siguientes integrales: a)  $\int_1^2 \left( \frac{3-x^2+x^4}{x^3} \right) dx$       b)  $\int \left( \frac{x-3}{x^2+9} \right) dx$

**Ejercicio 21:** Dada la función  $f(x) = 2\cos^2 x$  se pide:

a) Determinar los extremos absolutos de  $f(x)$  en  $[-\pi/2, \pi/2]$

b) Determinar los puntos de inflexión de  $f(x)$  en  $[-\pi/2, \pi/2]$

c) Calcular  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

**Ejercicio 22:** Dada la función  $f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$  se pide:

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f(x)$ .

b) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de  $f(x)$ .

c) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de  $f(x)$ .

**Ejercicio 23:** Dada la función  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 0$

b) Calcular  $\int_0^1 xf(x) dx$

**Ejercicio 24:** Dada la función  $f(x) = e^{1/x}$ , se pide

a) Calcular los límites  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y estudiar la existencia del  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de  $f(x)$

## EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019

**Ejercicio 25:** a) Sea  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto  $x = -2$  es de inflexión y que la recta de ecuación  $y = 16x + 16$  es tangente a  $f$  en dicho punto, determinar:  $f(-2)$ ,  $f'(-2)$  y  $f''(-2)$ .

b) Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de  $g(x) = x^4 + 4x^3$  y el eje  $OX$

**Ejercicio 26:** Calcular justificadamente a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x-e^x+\text{sen}(3x)}{x^2}$  b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

**Ejercicio 27:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  donde  $\ln x$  significa logaritmo neperiano de  $x$ , se pide:

- Determinar el valor de  $a$  para que la función sea continua en  $\mathbf{R}$ .
- Calcular los límites  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Estudiar la derivabilidad de  $f$  y hallarla cuando sea posible.

**Ejercicio 28:** Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$  se pide:

- Hallar las asíntotas y el dominio de  $f(x)$ .
- Calcular  $f'(x)$  y determinar los extremos relativos de  $f(x)$ .
- Calcular  $\int_0^1 f(x) dx$

**Ejercicio 29:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{5\text{sen}x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Hallar el valor de  $k$ , para que sea continua en  $x = 0$
- Decidir si la función es derivable en  $x = 0$  para algún valor de  $k$
- Calcular la integral  $\int_1^{\ln 5} f(x) dx$ , donde  $\ln$ , denota logaritmo neperiano

**Ejercicio 30:** Dada la función  $f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$  donde  $\ln$ , denota logaritmo neperiano se pide:

- Hallar las asíntotas y el dominio de  $f(x)$ .
- Calcular la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en  $x = 0$ .
- Calcular  $\int f(x) dx$

**Ejercicio 31:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}x}{x} & \text{si } x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  se pide:

## EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019

- a) Estudiar la continuidad de  $f(x)$
- b) Estudiar la derivabilidad de  $f$  y hallarla cuando sea posible.
- c) Calcular  $\int_1^3 f(x) dx$

### Ejercicio 32:

- a) Estudiar el crecimiento de la función  $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$
- b) Demostrar que la ecuación  $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$  tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

**Ejercicio 33:** a) Calcular la integral definida  $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx$

b) Hallar  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)e^{-x}$        $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x}$

**Ejercicio 34:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} a + x \ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  donde  $\ln x$  significa logaritmo neperiano de  $x$ , se pide:

- a) Determinar el valor de  $a$  para que la función sea continua en  $\mathbf{R}$ .
- b) Calcular  $f'(x)$  cuando sea posible.
- c) Calcular  $\int_{-1}^0 f(x) dx$

**Ejercicio 35:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  donde  $\ln x$  significa logaritmo neperiano de  $x$ , se pide:

- a) Estudiar la continuidad de  $f$  y calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 2$
- c) Calcular  $\int_{-1}^1 f(x) dx$

### Ejercicio 36:

- a) Determine el polinomio  $f(x)$  sabiendo que  $f'''(x) = 12 \forall x \in \mathbf{R}$  y además verifica  $f(1) = 3$ ;  $f'(1) = 1$ ;  $f''(1) = 4$
- b) Determine el polinomio  $g(x)$  sabiendo que  $g''(x) = 6 \forall x \in \mathbf{R}$  y además verifica

$$\int_0^1 g(x) dx = 5, \quad \int_0^2 g(x) dx = 14$$

**Ejercicio 37:** Estudie la continuidad y derivabilidad de  $f(x) = \begin{cases} |x \ln x| & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  donde  $\ln x$  significa logaritmo neperiano de  $x$ , en  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

## EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019

**Ejercicio 38:** Dada la función  $f(x) = (6 - x) \cdot e^{-x/3}$ , se pide:

- Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.
- Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
- Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $x = 0$ .

**Ejercicio 39:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$  se pide:

- Estudiar la continuidad de  $f(x)$  y determinar sus asíntotas
- Estudiar la derivabilidad de  $f$  y hallarla cuando sea posible.
- Calcular  $\int_{-1}^1 f(x) dx$

**Ejercicio 40:** Se administra una medicina a un enfermo y  $t$  horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por  $c(t) = te^{-t/2}$  miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de  $c(t)$  e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

**Ejercicio 41:** Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}$  se pide:

- Hallar las asíntotas verticales y el dominio de  $f(x)$ .
- Calcular el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$
- Calcular  $\int_3^5 f(x) dx$

**Ejercicio 42:** Dadas las funciones  $f(x) = 2/x$ ,  $g(x) = \text{sen}(x)$ , se pide:

- Calcular el  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) - \frac{2}{g(x)} \right)$
- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto  $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$
- Calcular el área delimitada por la curva  $y = f(x)$  y la recta  $y = -x + 3$

**Ejercicio 43:** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  donde  $\ln x$  significa logaritmo neperiano de  $x$ , se pide:

- Estudiar la continuidad y derivabilidad de  $f$  en  $x = 0$
- Calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$      $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- Calcular  $\int_{-1}^0 f(x) dx$

## EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019

**Ejercicio 44:** Se considera la función  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$  y se pide:

- Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .
- Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función y, en su caso, determinarlas.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

**Ejercicio 45:**

a) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes:  $m_1 = 0.92$ ;  $m_2 = 0.94$ ;  $m_3 = 0.89$ ;  $m_4 = 0.90$ ;  $m_5 = 0.91$ .

Se tomará como resultado el valor de  $x$  tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función  $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \dots + (x - m_5)^2$  alcanza el mínimo.

Calcule dicho valor  $x$ .

b) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral  $\int_1^2 x^2 \ln x dx$  donde  $\ln$  significa logaritmo neperiano.

**Ejercicio 46:** Se considera la función  $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$  y se pide:

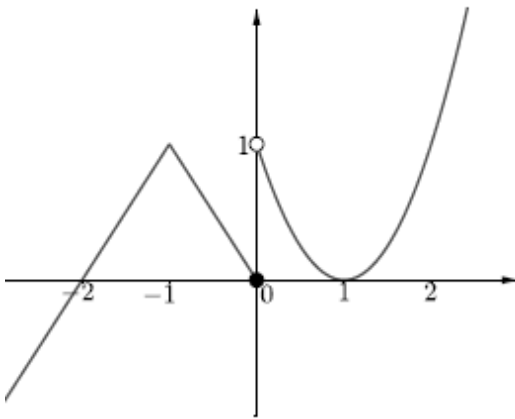
- Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de  $f(x)$ .
- Calcular  $f'(4)$ .
- Hallar el área del recinto acotado limitado por la curva  $y = f(x)$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x = -1$  y  $x = 1$ .

**Ejercicio 47:** Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$  y se pide

- Estudiar la continuidad de  $f(x)$  en  $x = 2$
- Calcular las asíntotas horizontales de  $f(x)$ . ¿Hay alguna asíntota vertical?
- Calcular  $\int_0^2 f(x) dx$

**EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019**

**Ejercicio 48:**



El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función  $y = f(x)$ . Usando la información de la figura, se pide:

- Indicar los valores de  $f(-1)$  y  $f'(1)$ .
- Justificar, usando límites laterales, si  $f$  es continua en los puntos  $x = -1$  y  $x = 0$ .
- Indicar razonadamente si  $f$  es derivable en los puntos  $x = -1$  y  $x = 0$ .
- Determinar el valor de  $\int_{-2}^0 f(x) dx$

**Ejercicio 49:** La contaminación por dióxido de nitrógeno,  $\text{NO}_2$ , en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función

$c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30} \text{ mg/m}^3$ , donde  $t \in [0, 30]$  representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

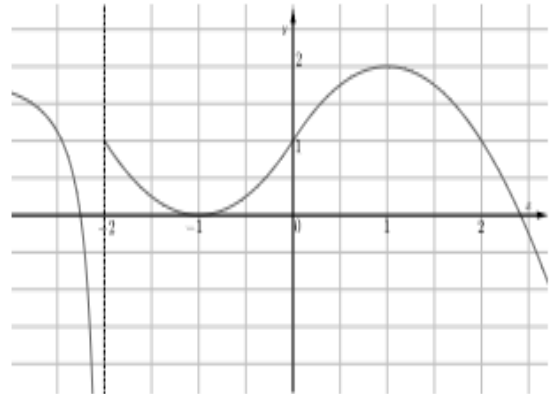
- ¿Qué nivel de  $\text{NO}_2$ , había a las 12 horas del día 10 de abril?
- ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de  $\text{NO}_2$ ?, ¿cuál fue ese nivel máximo?
- Calcule, mediante  $\frac{1}{30} \int_0^{30} c(t) dt$ , el nivel promedio del mes.

**Ejercicio 50:** a) A partir de la gráfica de la función  $f$ , determine los valores de  $f'(-1)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

b) Calcular  $\int_{-3}^{\pi} g(x) dx$  siendo

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ 1 + \sin x & \text{si } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$



**Ejercicio 51:** Dada  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , donde  $\ln$  denota el logaritmo neperiano, definida para  $x > 0$ , se pide:

- Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva  $y = f(x)$ .
- Encontrar un punto de la curva  $y = f(x)$  en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
- Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva  $y = f(x)$  y las rectas  $y = 0$  y  $x = e$ .

**Ejercicio 52:** Dada la función  $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$  se pide:

- Determinar su dominio.
- Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Calcular los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$



## EJERCICIOS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD. MADRID 2010 - 2019

**Ejercicio 52:** Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos  $t$  días después de iniciarse el brote viene dado por una función  $F(t)$  tal que

$$F'(t) = t^2(10 - t).$$

- Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función  $F(t)$ .
- Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.
- Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

**Ejercicio 53:** a) Sean  $f$  y  $g$  dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$f(1) = 1, f'(1) = 2, g(1) = 3, g'(1) = 4$ . Dada la función  $h(x) = f((x + 1)^2)$  use la regla de la cadena para

calcular  $h'(0)$ . Dada  $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , calcule  $k'(1)$

- Calcule la integral  $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx$  (Se puede usar el cambio de variable  $t = \sin x$ )