1.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES y PROPIEDADES GENERALES:

-Función real de variable real.

.*Definición:* Una función real de variable real, es una aplicación que a cada número real *x* le asocia otro número real *y = f(x).* A la abcisa *x* se le denomina variable independiente y a la ordenada *y* se le denomina variable dependiente.

. *Dominio de una función:* Son aquellos valores de la variable independiente, para los que la función existe.

- DENOMINADORES: Excluir aquellos que hacen cero el denominador.
- RAÍCES: Resolver Radicando $\geq$ 0.
- LOGARITMOS: Resolver “lo de dentro” > 0

.EJEMPLOS: Dadas las siguientes funciones, hallar su dominio:

1. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-5x+4}$ 2. $g(x)=\dfrac{x}{x^3+x^2-4x-4}$ 3. $h(x)=\sqrt{x^2-7x+6}$

4. $i(x)=\sqrt{-x^2+6x-8}$ 5. $j(x)=Ln(x^2-1)$ 6. $k(x)=\dfrac{Ln(x-1)}{\sqrt{x^2-4}}$

.SOLUCIONES:

1. ***x*** *Є* ***R*** *– {1,4}* *2.* ***x*** *Є* ***R*** *– {– 2, – 1,2}* *3.* ***x*** *Є (-∞, 1] U [6, + ∞)*
4. ***x*** *Є [2, 4]* *5.* ***x*** *Є (-∞, -1) U (1, + ∞)* *6.* ***x*** *Є (2, + ∞)*

.*Composición de funciones.* La composición de dos funciones *f* y *g* es una nueva función que representamos por (g o f), definida de la siguiente manera:

(g o f)(x) = g[f(x)]

.EJEMPLO: Dadas *f(x) = x + 1, g(x) = 2x + 1* y $h(x) = x^2 - x + 1$. Hallar *(g o f), (f o g), (g o h), (h o g)*

.*Paridad*: Función par f(x) = f(-x); Función impar f(-x) = - f(x). Las funciones pares son simétricas respecto del eje Y, mientras que las impares lo son respecto del origen.

.EJEMPLO: Decir si son pares o impares las siguientes funciones:

1. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^2+1$ 2. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|$ 3. $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^3+\boldsymbol{x}$

4. $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2$ 5. $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}+3}{\boldsymbol{x}-1}$ 6. $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}^3}{\boldsymbol{x}^2+1}$ 7. $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^4-2\boldsymbol{x}^2$

.SOLUCIONES: PAR (1,2 y 7) IMPAR (3,6) Ni PAR ni IMPAR (4,5)

.*Función valor absoluto.* El valor absoluto de un número x se define como:

$|x|=\begin{cases} x & si \quad x>0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$ Así se pueden tener expresiones: $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & si \quad f(x)>0 \\ -f(x) & si \quad f(x)<0 \end{cases}$

.EJEMPLOS: Representar las siguientes funciones.

1. $f(x)=\left|x^2-5x+4\right|$ 2. $g(x)=\left|2x-1\right|$ 3. $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$

4. $i(x)=x^2-|x|-2$ 5. $j(x)=|x-5|$ 6. $k(x)=\left|-x^2+7x-6\right|$

-Límite de una función.

. Una función *f(x)* tiene límite *L* en un punto *x = u*, si cuando nos acercamos a *u* en el eje *x*, obtenemos acercamientos en el eje *y* al valor *L*.

. OBS: u puede ser un número cualquiera ó infinito. También puede ocurrir que L sea un número ó infinito.

. Para el cálculo operativo de límites "sustituimos" la *x* por *u*. OJO: El límite ha de ser único. ¿Por dónde he de acercarme a *x = u*?

. Recordamos que $\dfrac{\boldsymbol{k}}{0}=\infty, -\dfrac{\boldsymbol{k}}{0}=-\infty, \dfrac{\boldsymbol{k}}{\infty}=0, \pm\dfrac{\infty}{\boldsymbol{k}}=\pm\infty, \dfrac{\infty}{0}=\infty, \dfrac{0}{\infty}=0$.

. Si *x* tiende a infinito un polinomio tiende a infinito, mandando el de grado mayor.

. EJEMPLOS:

1. $y = x^2$. Hallar el límite cuando *x* tiende a dos. SOL: *4*
2. $y=\dfrac{x+1}{x}$. Hallar el límite cuando *x* tiende a infinito y cuando *x* tiende a cero. SOL: *Si* $x\to\infty$ *vale 1, Si* $x\to 0^{\pm}$ *vale* $\pm\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+1}{x-4}$

SOL: *17/5* *0* *5/7* $\pm\infty$ *(der +, izq -)*

. *Límites laterales*.

Definimos el límite cuando x tiende a "*a*" por la derecha, respectivamente por la izquierda, como $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a^+)=\lim\limits_{x\to 0} f(a+h)$, respectivamente $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a^-)=\lim\limits_{x\to 0} f(a-h)$.

.EJEMPLOS:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{x-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2-1}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x^2}$

SOLUCIONES:

	1	2	3	4	5
Derecha	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Izquierda	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

EJEMPLOS: Hallar los límites laterales en el punto de "enganche" para las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 0 \\ 2x-3, & x>0 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 2-x^2, & x\le 2 \\ 2x-6, & x>2 \end{cases}$

SOLUCIONES: (El (a) no existe, el (b) existe y vale – 2)

	(a)	(b)
Derecha	– 3	– 2
Izquierda	– 1	– 2

.Indeterminación 0/0.

Se resuelve factorizando los dos polinomios y simplificando factores.

EJEMPLOS: 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$ 4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^3-3x^2-x+3}$

SOLUCIONES: *1. Lim = 2* *2. Lim = 2* *3. Lim = 1* *4. Lim = – 1/4*

-Límites en el infinito. Indeterminaciones ∞/∞, ∞-∞, 1^∞.

. Para ∞/∞ se divide por la potencia mayor de *x* (igual que con las sucesiones). Si hay raíces hay que tener en cuenta que la potencia que haya dentro de la raíz, es dividida por dos al salir fuera.

EJEMPLOS:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x^2-6x+8}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+12}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-75x^2+1}{40x^2+3x}$ $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^2}{(2x+1)(3x+7)}$ $c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+3}{2x^2-7}}$ $d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-7x+5}}{3x+5}$

SOLUCIONES: *1. Lim = 1* *2. Lim = 0* *3. Lim = + ∞* *4. Lim = 7/2*

a. Lim = + ∞ *b. Lim = 3/2* *c. Lim =* $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ *d. Lim = 2/3*

.REGLA INFALIBLE: $$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\pm\infty & si \quad gr(P)>gr(Q)\\ 0 & si \quad gr(P)<gr(Q)\\ \dfrac{coef(P)}{coef(Q)} & si \quad gr(P)=gr(Q)\end{cases}$$

.Para ∞ - ∞ se multiplica y se divide por el conjugado, o si se puede se restan las fracciones algebraicas.

EJEMPLOS: 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-x$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-3x+1}-(x+1)$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+2}-\boldsymbol{x}\right)$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2\boldsymbol{x}^3+3\boldsymbol{x}^2-1}{\boldsymbol{x}^2+2}-2\boldsymbol{x}\right)$

SOLUCIONES: *1. Lim = – ∞* *2. Lim = 0* *3. Lim = – 5/2*
4. Lim = 0 *5. Lim = 1* *6. Lim = 3*

Los límites del tipo 1^{∞} son del número "e".

EJEMPLOS: 1. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+6}$ 2. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{6x-2}$ 3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{2x-1}$

SOLUCIONES: *1. Lim = e* *2. Lim =* e^{24} *3. Lim =* e^{-2}

-Asíntotas.

. Asíntotas verticales $x = a$. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Serán aquellos puntos que no están en el dominio de *f(x)*

. Asíntotas horizontales $y = b$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

. Asíntotas oblicuas $y = mx + n$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$$

EJEMPLOS:

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ 3. $f(x) = \frac{x^2-x}{2x^2-8}$

4. $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x}$ 5. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ 6. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^2-3\boldsymbol{x}+2}{\boldsymbol{x}^2-1}$

SOLUCIONES:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
A. Verticales	*x = 0*	*x = – 1, x = 1*	*x = – 2, x=2*	*x = 0*	*x = – 1, x = 1*	*x = –1*
A. Horizontales	*y = 0*	*y = 1*	*y = 1/2*	*No*	*No*	*y = 1*
A. Oblicuas	*No*	*No*	*No*	*y = x – 1*	*y = x*	*No*

Aclaraciones: Una asíntota horizontal puede ser cortada por la función, pero "localmente", sin embargo para x muy grandes o muy pequeños, no podrá suceder. Las asíntotas verticales nunca se cortan por *f(x),* ya que *f(x)* no está definida en dicho punto.

-Continuidad.

. Definición de continuidad (basada en el límite): Una función *f(x)* es continua en un punto $x = a$, si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

. Continua por la derecha: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

. Continua por la izquierda: $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

.TIPOS DE DISCONTINUIDAD:

a) INEVITABLE: Se produce cuando los límites laterales no coinciden. Puede ser de salto finito o de salto infinito.
b) EVITABLE: Se produce cuando el límite existe pero la imagen en el punto no coincide con él.

.EJEMPLOS: **-** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 0 \\ 2x-3, & x>0 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 2-x^2, & x\le 2 \\ 2x-6, & x>2 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1,}{x-1} & x\ne 1 \\ 167, & x=1 \end{cases}$ d) $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})=\dfrac{2\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+2}$ e) $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}^2-1}{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}-2}$

SOLUCIONES:

(a) Discontinua de salto finito en x = 0.
(b) Continua en x = 2.
(c) Discontinuidad evitable en x = 1. Redefinir h (1)
(d) Discontinuidad de salto infinito (A.V.) en x = – 2.
(e) Discontinuidad de salto infinito (A.V.) en x = – 2. Discontinuidad evitable en x = 1.

EJEMPLO: Hallar el valor de *a* para que sean continuas. Representar la función del apartado a)

a) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3-ax^2, & x>1 \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax,}{7x^2+3x} & x\ne 0 \\ -1 & x=0 \end{cases}$ **c)** $h(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-2,}{2x^2-5x+2} & x\ne \dfrac{1}{2} \\ a & x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

SOLUCIONES: (a) *a = 1* (b) *a = 3* (c) *a = – 5/3*

2.- CÁLCULO DIFERENCIAL: DERIVADAS Y APLICACIONES.

-*Derivada de una función en un punto.*

.Se llama derivada de una función en un punto al siguiente límite si existe:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ COMO EJEMPLO: Calcular la derivada de *f(x) = x*^{2}

-Reglas de derivación.

.Derivada de una constante y = k, y` = 0

.Derivada de una función por un número. (a · f(x))' = a · f '(x)

.Derivada de una suma ó resta de funciones. (g(x) ± f(x))' = g'(x) ± f '(x)

.Derivada de un producto. (f(x) · g(x))' = f '(x) · g(x) + f(x) · g'(x)

.Derivada de un cociente. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Y combinando las anteriores con las siguientes, se hacen TODAS las derivadas. Pero OJO!!! De fuera hacia dentro, justo al revés de lo que estamos acostumbrados al operar:

.Regla de la cadena. ***(f(g(x)))' = f '(g(x))·g'(x)***
(Derivada de la función de fuera **por la derivada de lo de dentro**)

.Derivada de una potencia. $D(x^n) = n \cdot x^{n-1} \quad D(u(x)^n) = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x)$

.Derivada de un logaritmo neperiano. $D(Ln(x)) = \dfrac{1}{x} \quad D(Ln(u(x))) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

.Derivada de la exponencial. $D(e^x) = e^x \quad D(e^{u(x)}) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

.Derivada de una raíz cuadrada $D(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad D(\sqrt{u(x)}) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

.Derivada de una exponencial. $D(a^x) = a^x \cdot Ln(a) \quad D(a^{u(x)}) = u'(x) \cdot a^{u(x)} Ln(a)$

.Derivada de un logaritmo $D(\log_a(x)) = \dfrac{1}{x \cdot Ln(a)} \quad D(Ln(u(x))) = \dfrac{u'(x)}{u(x) \cdot Ln(a)}$

.Derivada de funciones trigonométricas.

$$D(sen(x)) = \cos(x) \qquad D(sen(u(x))) = u'(x)\cos(u(x))$$
$$D(\cos(x)) = -sen(x) \qquad D(\cos(u(x))) = -u'(x)sen(u(x))$$

.Derivada de funciones arco.

$$D(arcsen(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(arcsen(u(x))) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$
$$D(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \qquad D(\arctan(u(x))) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

.EJEMPLOS:

x^2+3x-2	$Lnx-5senx$	$x-3Lnx$	x^3+senx	e^{x^2+x+1}
e^{senx}	$x^2 \cdot Lnx$	$Lnx \cdot senx$	$x \cdot senx$	$\dfrac{x}{senx}$
$\dfrac{senx}{Lnx}$	$\dfrac{2x-1}{x^3-2x+1}$	$\dfrac{1}{x^3}$	$\sqrt{2x^2-x+1}$	$\dfrac{x}{Lnx}$
$\dfrac{e^x}{senx}$	$\dfrac{x^3-x^2+6x-1}{x^2-1}$	$\dfrac{x \cdot senx}{\cos x}$	$sen(senx)$	$Ln(Lnx)$
$Ln(x^3-x+1)$	$x \cdot Lnx \cdot senx$	$\cos(Ln(x^2-x+1))$	$sen(e^{x^2-1})$	$\sqrt{senx}$
$\sqrt[3]{x^2-2x-7}$	$\sqrt{Lnx}$	$\dfrac{1}{x^2-x-1}$	$sen\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$	$Ln\left(\dfrac{x^3-2x-1}{3x-5}\right)$

$arcsen(x^2-x) \quad \arccos(5x-1) \quad \arctan(2x^2-x+1) \quad x \cdot \arctan(x) \quad \arctan^2(x)$

-Funciones derivables. Propiedades.

.Derivadas laterales: Se llaman derivadas por la izquierda y por la derecha de una función respectivamente a los límites: $f'(a^-)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y $f'(a^+)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. NOTA: En la práctica si la función es derivable podemos ahorrarnos este límite.

.Una función es derivable en un punto $x = a$ si lo es por la derecha, por la izquierda y ambas coinciden.

.EJEMPLOS: Estudiar la derivabilidad de las funciones y dibujarlas:

a) $f(x)=\begin{cases} 2 & x\le 0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} x-2 & x\le 2 \\ 2-x & x>2 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} 2x^2+3x-2 & x\le \frac{1}{2} \\ 5x-5 & x>\frac{1}{2} \end{cases}$ d) $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} \boldsymbol{x}^2+4\boldsymbol{x}+3 & \boldsymbol{x}\le -1 \\ \boldsymbol{x}^2-1 & -1<\boldsymbol{x}<1 \\ \ln \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x}\ge 1 \end{cases}$

.SOLUCIONES: *a) No es continua y por tanto no puede ser derivable*
b) Continua en x = 2 pero no derivable
c) No es continua en x = ½ y por tanto no es derivable
d) Continua en -1 y en 1. Pero no es derivable en ninguno

.EJEMPLO: Hallar *a* y *b* para que sea derivable: $f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 1 \\ x^2-2ax+3, & x>1 \end{cases}$

. SOLUCIÓN: *a = 2/3, b = 2*

-Aplicaciones de la derivada. Recta tangente y normal a una curva en un punto.

.Recta tangente a *f(x)* en $x = a$: $y - f(a) = f\,'(a)\cdot(x - a)$

.Recta normal a *f(x)* en $x = a$: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

.EJEMPLOS: Hallar las rectas tangente y normal a las siguientes funciones en el punto que se indica.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$ en $x = 1$ b) $g(x) = e^{x-1}$ en $x = 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 4$ que sea paralela a $y = 2x - 3$

d) $g(x) = x\cdot e^{x-2}$ en el punto de abcisa *2*

. SOLUCIONES: a) $y = -5$ b) $y = x$ c) $y = 2x - 8$ d) $y = 3x - 4$

-Aplicaciones de la derivada. Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

.Dada una función *f(x)* cualquiera, su primera derivada *f '(x)* nos indica si es creciente, decreciente o constante en un punto $x = a$.

$$\boldsymbol{Si}\begin{cases} \boldsymbol{f\,'(a)} > 0 & \boldsymbol{creciente \quad en \quad x = a} \\ \boldsymbol{f\,'(a)} < 0 & \boldsymbol{decreciente \quad en \quad x = a} \\ \boldsymbol{f\,'(a)} = 0 & ??????\boldsymbol{Punto \quad crítico} \end{cases}$$

.Para ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*:
Hacemos *f '(x) = 0* y vemos que ocurre a la izquierda y la derecha de los puntos que me dieron en la ecuación anterior. EJEMPLO RESUELTO: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$ hallar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

1. *Derivamos f \`(x) = $x^2 - 6x + 8$. Igualo a cero la derivada $x^2 - 6x + 8 = 0$, de donde sacamos los valores x = 2, x = 4. Estos son los posibles máximos y mínimos. De momento, sólo podemos afirmar que son puntos críticos.*

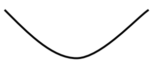
2. *Estudiamos el signo de la primera derivada:*

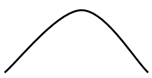
	(-∞,2)	*(2,4)*	*(4,+∞)*
f \`(x)	*Positiva*	*Negativa*	*Positiva*
f(x)	*Creciente*	*Decreciente*	*Creciente*

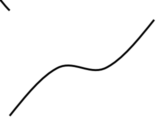
3. *Ya podemos afirmar que el punto M = (2, f(2)) = (2, -1/3), es un máximo relativo (pues f pasa de ser creciente a ser decreciente) mientras que el punto m = (4, f(4)) = (4, 16/3) es un mínimo relativo (pues f pasa de ser decreciente a ser creciente)*

4. *f es creciente en x Є(-∞,2)U(4,∞) y es decreciente en x Є (2,4)*

¿Qué ocurre si *f '(x) = 0*? Lo que sucede es que en ese punto la función ni crece ni decrece. Es decir la tangente (derivada) es horizontal. Pueden ocurrir tres cosas:

- Hay un mínimo.  *f '(a) = 0* y además *f ''(a) > 0*

- Hay un máximo.  *f '(a) = 0* y además *f ''(a) < 0*

- Ninguna de las anteriores.  *f ''(a) = 0*

Continuando con el ejemplo anterior, comprobamos que efectivamente x = 2 es máximo y que x = 4 es mínimo:

f \`\`(x) = 2x – 6. En x = 2, f \`\`(2) = -4<0, máximo
f \`\`(4) = 2 > 0, mínimo

.EJEMPLOS: Dadas las siguientes funciones estudiar su crecimiento y hallar máximos y mínimos:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ *2.* $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

. SOLUCIONES:

1. *f(x) es creciente en (-∞,0)U(2,∞) y decreciente en (0,1). Max.Rel: (0,1) y Min. Rel: (2, – 3)*

2. *g(x) es creciente en (-∞,1)U(3,∞) y decreciente en (1,3). Max.Rel: (1,– 4) y Min. Rel: (3, – 8)*

. Dada una función f(x) cualquiera, su segunda derivada f''(x) nos indica si es cóncava ó convexa en un punto x = a.

$$Si\begin{cases} f''(a) > 0 & convexa \quad en \quad x = a \\ f''(a) < 0 & cóncava \quad en \quad x = a \\ f''(a) = 0 & ??????????????????? \end{cases}$$ OJO: puede haber otros criterios.

¿Qué ocurre si f''(x) = 0? Lo que sucede es que en ese punto la función puede estar cambiando su concavidad. A tal punto, se le denomina PUNTO DE INFLEXIÓN.

$$Si\begin{cases} f'''(a) > 0 & \inf lexión \quad cóncava - convexa \quad en \quad x = a \\ f'''(a) < 0 & \inf lexión \quad convexa - cóncava \quad en \quad x = a \end{cases}$$

. En la práctica, el estudio de la segunda derivada se hace igual que el de la primera derivada, es decir se mira el signo de *f ``*

.EJEMPLOS: Dadas las siguientes funciones estudiar su primera y segunda derivada:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ *2.* $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

3. $h(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ *4.* $i(x) = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$

. SOLUCIONES (de los EJEMPLOS 1 y 2).

1. *f (x) es cóncava (1, ∞) en y convexa en (-∞, 1). Tiene un punto de inflexión en (1, – 1)*

2. *g(x) es cóncava (2, ∞) en y convexa en (-∞, 2). Tiene un punto de inflexión en (2, – 6)*

NOTA: La primera derivada de estas dos funciones está estudiada en el ejemplo anterior.

-Estudio local de funciones.

.Dominio de funciones. Son aquellos valores de la variable independiente, para los que la función existe.

.Continuidad: Indicar las discontinuidades de la función si las tuviese.

.Asíntotas: Calcular las asíntotas de la función. Si no tuviese, hacer los límites en infinito y menos infinito, para saber hacia donde se va la curva.

.Cortes con los ejes: OX – Hacer $y = 0$. OY – Hacer $x = 0$.

.Paridad: Función par $f(x) = f(-x)$; Función impar $f(-x) = - f(x)$.

.Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos: Estudio de la primera derivada.

.Concavidad y convexidad, puntos de inflexión: Estudio de la segunda derivada.

.Representación gráfica. Esbozo de la gráfica en base a lo calculado en los apartados anteriores.

.EJEMPLOS: Estudiar y representar gráficamente las funciones:

1. $f(x) = x^3 – x$ *2.* $g(x) = x^4 – 4x^2$ *3.* $h(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$

4. $i(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ *5.* $j(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ *6.* $k(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

7. $l(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ *8.* $m(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

9. $n(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - 8}$ *10.* $q(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ *11.* $r(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1}$