EJERCICIOS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN MADRID.

1. Considere el sistema de ecuaciones dependiente de m:

$$\begin{cases} x + y + mz = m+2 \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = -m \\ (m+2)x + 3y + (2m+1)z = 3m+4 \end{cases}$$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b. Resuélvase el sistema en el caso de infinitas soluciones.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$

a. Encontrar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$

b. Calcular A^{10}

c. Hallar todas las matrices M que satisfacen $(A - M) \cdot (A + M) = A^2 - M^2$

3. Se considera el sistema lineal dependiente de a $\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a+1 \end{cases}$

(a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

(b) Determinar para qué valores de a el sistema tiene solución en la que y = 2.

4. Dada la siguiente matriz de orden n $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & & 1 & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$ se pide

Calcular el determinante de la matriz A_2, A_3 y A_5

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$

a) Estúdiese el rango de A para los distintos valores de a

b) Decir cuando la matriz A es invertible. Calcule su matriz inversa para $a = 1$.

6. Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x - 2y + z - 3v = -4 \\ x + 2y + z + 3v = 4 \\ 2x - 4y + 2z - 6v = -8 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$

7. El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 €. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €.

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN MADRID.

8. Se considera el sistema lineal dependiente de *k* $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores de *k*.

b. Resolverlo en los casos que sea posible

9. Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$

10. Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden tres con columnas C_1, C_2, C_3 y se sabe que $det\,(A) = 4$, se pide:

a. Calcular el $det\,(A^3)$ y $det\,(3A)$

b. Calcular el $det\,(B)$ y $det\,(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son $2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$

11. Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente de *m*: $\begin{cases} 4x + 4my + 2z = 2m \\ mx + y - mz = m \\ 4mx + 4my + mz = 9 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro *m*.

b. Resuélvase el sistema en el caso $m = -1$.

12. Se considera el sistema lineal dependiente de *k* $\begin{cases} 2x - y = k \\ kx - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores de *k*.

b. Resolverlo en los casos que sea posible

13. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Estúdiese el rango de *A* para los distintos valores de *a*

b) Calcule su matriz inversa para $a = -1$.

14. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Determinar los valores de *m* para los cuales la matriz *M* es invertible

b. Determinar los valores de *m* para los cuales la matriz M^{25} es invertible

c. Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa de *M*

15. Se considera el sistema lineal dependiente de m: $\begin{cases} mx+2y+z=0 \\ mx-y+2z=0 \\ x-my+2z=0 \end{cases}$

a) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial *x = y = z = 0.*

b) Resuélvase el sistema para *m =5*

16. Considérense las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Calcúlese la matriz *X* que verifica *AXB = A + B*.

17. Se considera el sistema lineal $\begin{cases} 2x-y=\sqrt{3} \\ \\ 3x+2z=2\sqrt{5} \end{cases}$

a. Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema sea compatible determinado

b. Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado

18. Considérense las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Hallar una matriz *X* que verifique la ecuación matricial: *XB = A + B.*

19. Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente de m: $\begin{cases} (m+1)x+y+z=0 \\ x+(m+1)y+z=m \\ x+y+(m+1)z=m^2 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b. Resuélvase el sistema en el caso *m = 0*.

20. Obtener para todo número natural n el valor de: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$

21. Discutir el sistema lineal, en función del parámetro k $\begin{cases} x+ky+z=k+2 \\ kx+y+z=k \\ x+y+kz=-2(k+1) \end{cases}$

22. Dado el sistema: $\begin{cases} x+z=2 \\ x+my-z=4 \\ -mx-y-z=-5 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b. Resolver en el caso que sea compatible indeterminado

c. Resuélvase el sistema en el caso *m = – 2*.

23. Se considera el sistema lineal dependiente de *k*: $\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$

a) Determínense los valores del parámetro real *k* para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial *x = y = z = 0.*

b) Resuélvase el sistema para *k = 3.*

24. Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Hallar dos constantes a y b tales que $A^2 = aA + bI$

b. Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, obtener el valor de A^5, utilizando la expresión anterior

25. Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente de *m*: $\begin{cases} x + my - z = m \\ mx + 2z = -2 \\ x + z = -2 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro *m*.

b. Resuélvase el sistema en el caso *m = 0*.

26. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$ y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a. El determinante de la matriz: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b. $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix}$

27. Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente de *m*: $\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m+1)y + z = 9 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro *m*.

b. Resuélvase el sistema en el caso *m = 0*.

28. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ determinar para qué valores de *a* tiene inversa y calcularla cuando sea posible

29. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$ se pide:

a. Determinar el rango de *A* en función del parámetro *m*

b. En el caso *m = 0* resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

30. Se considera el sistema lineal $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$

a. Estudiar la compatibilidad del sistema

b. Añadir, de forma razonada, una ecuación para que sea compatible determinado

c. Añadir, de forma razonada, una ecuación para que sea incompatible

31. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$ se pide:

a. Determinar el rango de *A* en función del parámetro *a*

b. ¿Para qué valores de *a* existe la matriz inversa A^{-1}? Calcularla para *a = 1*

32. El sistema *AX = B*. Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tiene diferentes soluciones según sea la matriz *B*

a. Determinar, si existen, el valor o valores de *a* para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de *B*)

b. Si *a* = 4 y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar si existen el valor o los valores de *b* para los que el sistema es incompatible.

c. Si *a* = 4 y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, Determinar si existen el valor o los valores de *c* para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema

33. Se considera el sistema lineal dependiente de *k* $\begin{cases} x + y + kz = k \\ x + ky + z = k^2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores de *k*.

b. Resolverlo para *k = 0*

34. Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente de *m*: $\begin{cases} mx + mz = 2 \\ x + my - z = 1 \\ x + 3y + z = 2m \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro *m*.

b. Resuélvase el sistema en el caso *m = 1*.

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN MADRID.

35. Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calcular $A^2 - 4A + 3I$

b. Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es igual a $\frac{1}{3}(4I - A)$

c. Hallar la matriz inversa de $A - 2I$

36. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ se pide:

a. Determinar el rango de A en función del parámetro a

b. En el caso $a = 2$, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b y resolverlo cuando sea posible.

c. En el caso $a = 1$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

37. a. Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

b. Resolver en los casos $m = 0$ y $m = 1$

38. Calcular el rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$ según los valores de a

39. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} senx & cosx & 0 \\ cosx & -senx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calcular el determinante de la matriz M

b. Hallar la matriz M^2

c. Hallar la matriz M^{25}

40. Se considera el sistema lineal dependiente de k $\begin{cases} 2x + 4y = 4k \\ -k^3x + k^2y + kz = 0 \\ x + ky = k^2 \end{cases}$

a. Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b. Resolver el sistema para $k = 1$.

c. Resolver el sistema para $k = 2$.

41. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

a. Calcular el rango de la matriz A según los valores de *k*

b. Para *k = 2*, hallar, si existe, la solución del sistema lineal *AX = B*

c. Para *k = 1*, hallar, si existe, la solución del sistema lineal *AX = C*

42. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ $\; y \;$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$ se pide:

a. Calcular el rango de la matriz *B* según los valores de *a*

b. Para *a = 0*, hallar la matriz *X* que verifica *AX = B*

43. Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

44. Se considera el sistema lineal dependiente de *k* $\left\{ \begin{aligned} kx + 7y + 5z &= 0 \\ x + ky + z &= 3 \\ y + z &= -2 \end{aligned} \right.$

a. Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b. Resolver el sistema para k = 4. c. Resolver el sistema para k = 2.

45. Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calcule el valor de *a*, para el cual la ecuación matricial: *XA = B* tiene solución única.

b. Calcular la matriz *X* para *a = 4*

c. Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de *a*

46. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ $\quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A en función de *a*

b. Resolver el sistema homogéneo *AX = O* en el caso *a = 1*

c. Resolver el sistema homogéneo *AX = O* en el caso *a = – 1*

47. Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + my + mz \ = 1 - m \\ x + y + (m-1)z = -2m \\ (m-1)x + y + z \ = m - 1 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro *m*.

b. Resuélvase el sistema en el caso *m = 1*.

c. Resuélvase el sistema en el caso *m = – 1*.

48. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. Calcular *α, β, γ,* para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema *AX = B*

b. Si *β = γ = 1,* ¿Qué condición debe cumplir *α* para que el sistema homogéneo *AX = O* sea compatible determinado?

c. Si *α = – 1; β = 1; γ = 0,* resuelva el sistema *AX = B*

49. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de *a* para que la matriz tenga inversa

b) Calcule su matriz inversa para *a = 2.*

50. Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

51. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. Determinar el valor o valores de *a* para los cuales no existe la inversa de *A*
b. Para *a = – 2* hallar la matriz inversa de *A*
c. Para *a = 1*, calcular todas las soluciones del sistema *AX = O*

52. Dada la ecuación matricial $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde *B* es cuadrada de orden 2x2

a. Calcular el valor o valores de *A* para los cuales esta ecuación tiene solución

b. Calcular *B* para el caso *a = 1*

53. Estudiar el rango de A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$ en función de los valore de *a*

54. Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} 4x+3y+(m-1)z = 0 \\ x-2y+mz = 1 \\ 5x+my+z = 1 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro *m*.

b. Resuélvase el sistema en el caso *m = 1*.

55. Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ se pide

a. Calcular A^{15} y A^{20}

b. Resolver la ecuación *6X = B – 3AX,* donde *X* es cuadrada de orden 3.

56. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide

a. Hallar el rango de *A* en función de *t*

b. Calcular *t* para que det*(A – tI) = 0*

57. Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} -mx+my+z = 0 \\ x-my+3z = 4 \\ 2x-2y-z = 0 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro *m*.

b. Resuélvase el sistema en el caso *m = 0*.

c. Resuélvase el sistema en el caso *m = 2*.

58. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a. $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

59. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen *AB = BA.*

60. a. Despeje X en la ecuación matricial $X\cdot(CD)^{-1} = A + X\cdot(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible

b. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$

61. Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b. Resuélvase el sistema en el caso $m = 0$.

c. Resuélvase el sistema en el caso $m = 2$.

62. a. Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b. Determine los posibles valores de m para que el rango de A sea 2, donde

$$A = m\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

63. Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que, de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

64. Se considera el sistema lineal dependiente de k $\begin{cases} 2x + (k-1)y - 2z = k \\ 2x + y - kz = 2 \\ -x + y + z = 1 - k \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b. Resolverlo en los casos que sea posible

65. Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b. Resuélvase el sistema en el caso $a = 1$.

c. Resuélvase el sistema en el caso $a = 2$.

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN MADRID.

66. Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

67. Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

68. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden 3, I, se pide:

a) Calcular la matriz $B = (A-I)\cdot(2I + 2A)$.

b) Determinar el rango de las matrices $A-I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.

c) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

69. Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\left\{ \begin{array}{l} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{array} \right.$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b. Resuélvase el sistema en el caso $m = 0$.

70. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

b) Para $m = 0$, calcular $A\cdot B$ y $A^{-1}\cdot B$.

c) Calcular $B\cdot B^t$ y $B^t\cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

71. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.

b) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

72. Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

73. Para cada uno de los siguientes apartados, proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3×3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.

a) El determinante de A vale 0.

b) El determinante de A vale 1.

c) La matriz A coincide con su traspuesta.

d) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que $A \cdot C = C \cdot A$. (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C.)

74. Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x - my \quad\quad - z = 0 \\ mx - 4y + (6-2m)z = -8m \\ -x + 2y \quad\quad + z = 6 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b. Resuélvase el sistema en el caso $m = 6$.

75. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

76. Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, elvendedorleofreci´ollevarseunbocadilloyunrefrescoporsolo3euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

77. Se considera el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = 0 \end{cases}$

a. Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro *k*.

b. Resuélvase el sistema en el caso *k = – 1*.

78. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} e\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular para qué valores $a \in \mathbf{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) Calcular los números reales *a* para los que la matriz *A* admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro *a*.

c) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de *A*.