LÍMITES DE FUNCIONES

Llamamos **LÍMITE** de una función f en un punto x=a al valor al que se aproximan las imágenes de la función cuando x se aproxima al valor de a. Lo veremos con un ejemplo:

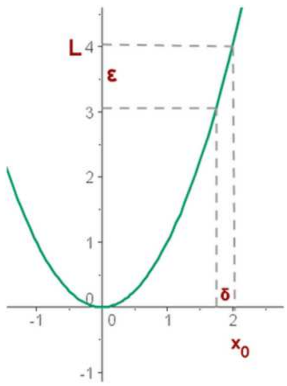
• EJEMPLO 1: Sea la función $f(x)=x^2$. Vamos a calcular el valor del límite de la función cuando x se aproxima a 2

• Si damos a x valores que se aproximan a 2 pero más pequeños que 2, como por ejemplo: 1'9, 1'99, 1'999, …
Vemos que el valor de f(x) se aproxima a 4: 3'96, 3'98, 3'99, …
• Si damos a x valores que se aproximan a 2 pero mayores que 2, como por ejemplo: 2'1, 2,01, 2,001, …
vemos que el valor de f(x) se aproxima a 4: 4'41, 4'04, 4'004, **…**
Diremos entonces que el límite de f(x) cuando x tiende a 2 es 4 y lo escribiremos:

$$\lim_{x\to 2} x^2=4$$

Y en general:

Límite de una función: Se dice que la función f(x) tiene como límite el número L , cuando x tiende a x_0, si fijado un número real positivo ε , mayor que cero, existe un numero positivo δ dependiente de ε, tal que, para todos los valores de x distintos de x_0 que cumplen la condición $|x - x_0| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.



$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0 \ /\ \text{si } |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Es decir: que si los valores de x se mantienen próximos a x_0 (su distancia a x_0 es tan pequeña como queramos) entonces los valores de sus imágenes se mantienen próximos al valor de L.

En el ejemplo anterior, hemos visto que x puede tender a 2 tomando las siguientes sucesiones de números:
• 2'1, 2'01, 2'001,2'0001, 2'00001, …es decir: por la derecha de 2
• 1'9, 1'99, 1'999, 1'9999, 1'99999, …es decir: por la izquierda de 2
• Se hace preciso distinguir ambos límites.

Límites laterales

Límite por la derecha: Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a x_0^+ es L_1, si cuando los valores de x se aproximan a x_0, por valores próximos a x_0 pero mayores que x_0 entonces los valores de f(x) se aproximan a L_1. Y lo escribiremos:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$$

Límite por la izquierda: Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a x_0^- es L_2, si cuando los valores de x se aproximan a x_0, por valores próximos a x_0 pero menores que x_0 entonces los valores de f(x) se aproximan a L_2. Y lo escribiremos:

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$

El límite de una función en un punto si existe, es único. Para que exista el límite de una función en un punto, tienen que existir los límites laterales en ese punto y coincidir, es decir:

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} = L$

Ejemplo2

sea $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$, vamos a calcular: $\lim_{x \to 1} f(x)$

Valores de x	0,9	0,99	0,999	1	1,1	1,01	1,001
Valores de f(x)	2,8182	2,9802	2,9980	?	3,2222	3,0202	3,0020

Como se puede intuir, el límite de la función cuando $x \to 1$, es 3 diremos entonces:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-4}{x-2} = 3$$

Ejemplo 3

Sea $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ vamos a calcular: $\lim_{x \to 3} f(x)$

Valores de x	2,999	2,9999	3	3,0001	3,001
Valores de f(x)	0,1667	0,16667	?	0,16667	0,1667

como se puede ver cuando x se acerca a 3, la función se acerca a 1/6, diremos entonces que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{1}{6}$$

sin embargo, la función no está definida para x=3, $x=3 \notin D(f)$

Ejemplo 4

Sea $f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{si } x<2 \\ -2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ vamos a calcular: $\lim_{x \to 2} f(x)$

como está definida a trozos y el punto de separación es x=2, calculamos el límite por la derecha de x=2 y por la izquierda de x=2

Valores de x	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001
Valores de f(x)	-2,001	-2,0001	?	-2	-2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x-4) = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-2) = -2$$

Como el límite por la derecha y el límite por la izquierda coinciden, diremos que:

$$\exists \lim_{x\to 2} f(x) \text{ y } \lim_{x\to 2} f(x) = -2$$

Límites infinitos:

Una función f(x) tiene limite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 si cuando al cercamos a x_0 tanto por la izquierda como por la derecha la función crece de forma infinita. Esto ocurre cuando los dos límites laterales valen ∞. Se escribe como:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

De la misma manera, se dice que una función f(x) tiene limite $-\infty$ cuando x tiende a x_0 si cuando al acercamos a x_0 tanto por la izquierda como por la derecha la función decrece de forma infinita. Es decir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Ejemplo 5

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$, calculemos $\lim_{x\to 0} f(x)$

Valores de x	0,01	0,0001	0,000001	0	- 0,01	-0,0001	-0,000001
Valores de f(x)	10^4	10^8	10^{12}	?	10^4	10^8	10^{12}

por lo que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Propiedades de los límites

1. Límite de una constante:

$$\lim_{x\to x_0} K = K$$

2. Límite de una suma

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

3. Límite de un producto

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

4. <u>Límite de un cociente</u>

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \qquad \text{si } \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

5. <u>Límite de una potencia</u>

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \qquad \text{si } f(x)>0$$

6. <u>Límite de un logaritmo</u>

$$\lim_{x\to x_0}\left[\log_a f(x)\right] = \log_a\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] \qquad \text{si } a>0 \text{ y } f(x)>0$$

<u>Ejemplo 6</u>

Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$ **y** $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3$ **, calcula:**

a) $\lim\limits_{x\to 2} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) + \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5 + 3 = 8$

b) $\lim\limits_{x\to 2} 7.f(x) = 7. \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7.5 = 35$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{[f(x) / g(x)]} = \sqrt{[\lim\limits_{x\to 2} f(x) / \lim\limits_{x\to 2} g(x)]} = \sqrt{(5 / 3)} = \sqrt{15} / 3$

d) $\lim\limits_{x\to 2} (f(x))^{g(x)} = 5^3 = 125$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \log_{25} f(x) = \log_{25} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \log_{25} 5 = 1 / 2$

Habitualmente, al calcular límites de funciones, surgen expresiones en las que aparecen operaciones con infinito. Dado que no es un número, conviene no dar por sentado resultados que son normales en las operaciones con números. Por ejemplo, $\infty - \infty$, no tiene por qué dar cero y tampoco $\frac{\infty}{\infty}$ tiene por qué dar 1.

Para resolver estos límites no tenemos más que comparar el crecimiento de las funciones, de tal forma que prevalece aquella cuya tendencia a $+\infty$, o $-\infty$ sea mayor. Así por ejemplo si calculamos el límite cuando x tiende a infinito en un polinomio, el resultado va a depender del término de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^2-3x+4\right) = \lim_{x\to\infty}[x(2x-3)+4]= \infty\cdot\infty+ 4= \infty$$

y en general, una exponencial tenderá más rápidamente a infinito que un polinomio y este a su vez lo hará más rápidamente que un logaritmo.

Además deberemos tener en cuenta que:

Respecto a la suma:

1) $\forall k \in R \; k \pm \infty = \pm\infty$

2) $\infty + \infty = \infty$

3) $-\infty - \infty = -\infty$

Respecto a la multiplicación:

1) $\forall k \in R^{+}$ (k>0) $k \cdot \infty = \infty$ → ejemplo $\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$

2) $\forall -k \in R^{-}$ (-k<0) $k \cdot \infty = -\infty$ → ejemplo $\lim_{x \to +\infty} -3x = -\infty$

3) $\forall k \in R^{+}$ (k>0) $k \cdot (-\infty) = -\infty$ → ejemplo $\lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$

4) $\forall -k \in R^{-}$ (-k<0) $-k \cdot (-\infty) = \infty$ → ejemplo $\lim_{x \to -\infty} -3x = +\infty$

Respecto al cociente:

1) $\forall k \in R \quad \frac{k}{\pm\infty} = 0$ → ejemplo $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$

2) $\forall k \in R^{+} \quad \frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$ → ejemplo $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{4} = -\infty$

3) $\forall -k \in R^{-} \quad \frac{\pm\infty}{-k} = \mp\infty$ → ejemplo $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-4} = -\infty$

Respecto a la exponencial:

1) $\forall k \in R$ k>1 $k^{+\infty} = +\infty$ → ejemplo $\lim_{x \to +\infty} 2^{x} = +\infty$

2) $\forall k \in R$ 0<k<1 $k^{+\infty} = 0$ → ejemplo $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 0$

3) $\forall k \in R$ k>1 $k^{-\infty} = 0$ →ejemplo $\lim_{x \to -\infty} 2^{x} = 0$

4) $\forall k \in R$ 0<k<1 $k^{-\infty} = +\infty$ → ejemplo $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = +\infty$