NÚMEROS COMPLEJOS

Al resolver ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$ nos encontramos que las soluciones son de la forma: $x = \pm \sqrt{-1}$ que no tiene solución en los números reales.

Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como número válido a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

Llamamos ***unidad imaginaria*** al nuevo número $\sqrt{-1}$ y la denotamos con la letra "**i**"

- **i=**$\sqrt{-1}$ de forma que $\mathbf{i^2=-1}$

Llamamos **Número complejo "z"** a toda expresión de la forma: **a+b·i** donde a y b son números reales.

Componentes: La expresión a + bi se le llama **"Forma binómica"** del número complejo ya que está formado por dos partes: **a=Parte real** y **b= Parte Imaginaria.**

El conjunto de todos los números complejos se designa por C

- C = $\{a+bi \,/ a,b \in \mathbb{R}\}$

Números Reales: de esta forma, podemos ver que los números reales son complejos pues los reales son números complejos cuya parte imaginaria (b) es cero, es decir son de la forma: a + 0i = a luego: $\mathbb{R} \subset$ C.

Números imaginarios puros: son los imaginarios cuya parte real (a) es cero: 0 + bi = bi

Opuesto de un número complejo: Si z = a + bi, su opuesto será: -z = -a –bi ya que z+(-z)=0.

Conjugado de un número complejo: Si **z** = a + bi, su conjugado se denota como $\bar{\mathbf{z}}$ y es el mismo número pero con el signo de la parte imaginaria cambiado, es decir:

$\bar{\mathbf{z}}$ a-bi

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Las operaciones con los números complejos en forma binómica se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

SUMA: La suma de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b+b')i

RESTA: La resta de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la resta de las partes reales y cuya parte imaginaria es la resta de las partes imaginarias.

z - z' = (a + bi) - (a' + b'i) = a + bi - a' - b'i = (a - a') + (b-b')i

<u>MULTIPLICACIÓN</u>: Se realiza como cualquier producto de binomios

z·z' = (a + bi)·(a' + b'i) = a·a' + a·b'i + ba'i + b.b'i2

= a·a' + a·b'i + a'·bi – b·b' = = (a·a' - b·b') + (a·b' + a'·b)i

Nota: Si multiplicamos un número complejo por su conjugado obtenemos un número real: $z·z = (a + bi)·(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2·i^2 = a^2 + b^2$

<u>DIVISIÓN</u>: Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{z}{z'}=\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi).(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\frac{(a.a'+b.b')+(b.a'-a.b')i}{a'^2+b'^2}=\frac{a.a'+b.b'}{a'^2+b'^2}+\frac{ba'-a.b'}{a'^2+b'^2}i$$

Ejemplo: Si z=2+3i y z´=1-5i

suma: (2+3i)+(1-5i)= 2+3i+1-5i=3-2i

resta: (2+3i)-(1-5i)= 2+3i-1+5i=1+8i

multiplicación: (2+3i) ·(1-5i)= 2·1-2·5i+3i·1-3i·5i=17-7i

división: (2+3i):(1-5i)=$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

<u>POTENCIAS DE i</u> :

i^2=-1; i^3= i^2·i=-i; i^4= i^2· i^2=1; i^5= i^4·i=i; i^6= i^5·i=-1…….

Como se puede ver, se repiten cada cuatro potencias, por lo que para calcular i^n, se divide n entre cuatro y nos quedamos con el resto (0,1,2,3) ⇒ $i^n = i^r$

<u>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</u>

Las sucesivas categorías de números (naturales, enteros, racionales,...) se pueden representar sobre la recta. Los reales la llenan por completo, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y cada punto, un número real. Por eso hablamos de recta real.

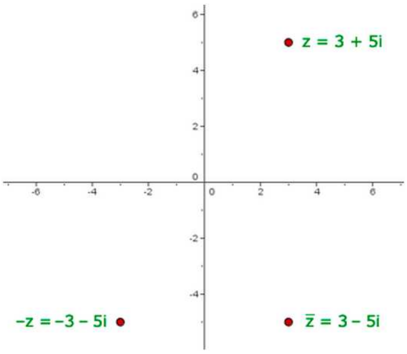
Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la recta real al plano complejo.

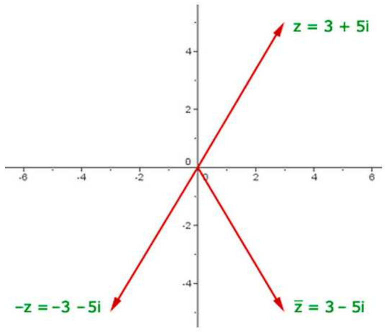
Los números complejos se representan, de forma similar a los vectores, en unos ejes cartesianos. **El eje X se llama eje real** y el **Y, eje imaginario**. El número complejo a + bi se representa mediante el punto (a,b) que se llama **afijo**, o mediante un vector de origen (0,0) y extremo (a,b).

Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real y los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

Módulo de un número complejo z es la longitud del vector mediante el que dicho número se representa. Se designa por r = |z|. Si z=a+bi el módulo será:

- $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$





Argumento de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real positivo. Se designa: α = arg (z) (0º ≤ α ≤ 360º). Si z=a+bi el argumento será:

- α = arg (z)= arc tg $\frac{b}{a}$

Números complejos en forma polar: De esta manera, un número complejo queda también, perfectamente definido dando su módulo y su argumento y se expresa: $\mathbf{r_\alpha}$

Ejemplo: z=3+4i → r=$\sqrt{3^2+4^2}=5$; α=arc tg $\frac{4}{3}$ =53,13º → z=$5_{53,13º}$

OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

PRODUCTO: Al multiplicar dos números complejos en forma polar obtenemos otro número complejo en forma polar cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos (reduciéndola a un ángulo entre 0º y 360º)

$\mathbf{r_\alpha . r'_{\alpha'} = rr'_{\alpha+\alpha'}}$

POTENCIA: La potencia enésima de un número complejo en forma polar es otro número complejo en forma polar de módulo la potencia enésima del módulo y por argumento el argumento multiplicado por n.

$(\mathbf{r_\alpha})^{\mathbf{n}} = r_\alpha \ldots\ldots r_\alpha = (r\ldots\ldots r)_{\alpha+\ldots+\alpha} = (r^n)_{n\alpha}$

COCIENTE: El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo de módulo el cociente de los módulos y por argumento la resta de los argumentos:

$$\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}$$

RADICALES: Las n raíces enésimas de un número complejo en forma polar, tienen como módulo, la raíz enésima del módulo y como argumentos: $\frac{\alpha+360º\cdot k}{n}$, con k=0,1,2...n-1

Para n > 2, los afijos de estas n raíces son los vértices de un n-ágono regular con centro en el origen

Ejemplo: sean: $z=4_{30^{o}}$ y $z'=2_{15^{o}}$

Producto: $z \cdot z' = 4 \cdot 2_{30^{o}+15^{o}} = 8_{45^{o}}$

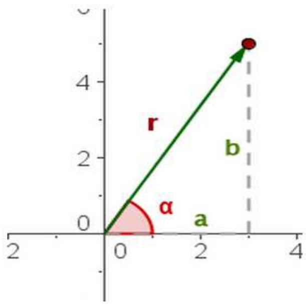
División: $\frac{z}{z'} = \left(\frac{4}{2}\right)_{30^{o}-15^{o}} = 2_{15^{o}}$

Potencia: $z^3 = 4^3_{3\cdot 30^{o}} = 64_{90^{o}}$

Raíz: $\sqrt[3]{z}$: tiene tres raíces: $z_1=(\sqrt[3]{4})_{10^{o}}$; $z_2=(\sqrt[3]{4})_{130^{o}}$; $z_3=(\sqrt[3]{4})_{250^{o}}$

Números complejos en forma trigonométrica:

Sea $z=a+bi$, si lo representamos, se ve claramente que:



$a=r\cdot\cos\alpha$ y $b=r\cdot\text{sen}\,\alpha$

por lo que también podemos expresar el numero complejo a+bi de la forma:

$\mathbf{z=r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)}$

llamada forma trigonométrica del numero complejo z

FÓRMULA DE MOIVRE

Aplicando las propiedades de la potencia de un número complejo, se obtiene la siguiente fórmula, llamada fórmula de Moivre:

$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha)$

de gran utilidad en trigonometría, pues nos permite hallar cos nα y sen nα en función de cosα y sen α.

EJERCICIOS:

1º) Representamos por $\bar{z}$ el conjugado del número complejo z, es decir, si $z = a+bi$ entonces $\bar{z} = a-bi$.

a) Demuestra que $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ para cualquier pareja de números complejos z_1 y z_2.

b) Demuestra que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ para cualquier número complejo z.

c) Ayudándote de los apartados anteriores, comprueba que:

$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\cdot(|z_1|^2+|z_2|^2)$