Calculate los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5x}{x+1}-\dfrac{3x}{2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x}{x+1}-\frac{3x}{2}\right)=\xrightarrow[\infty-\infty]{\text{Indeterminación}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2(x^2-5x)-(x+1)3x}{(x+1)2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-10x-3x^2-3x}{2x+2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2}\right)=\overset{\text{Indeter}}{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x^2(\sqrt{x+9}+3)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x^2(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\pm\infty$$

hay que calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)}=-\infty,\ \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)}=+\infty$$

alcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x-3}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{2x}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{2x-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=\frac{-18}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=+\infty;\qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=-\infty$$

Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1}$

Solución:

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x}{2x+5}-1\right)\cdot\left[2x^2-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x-2x-5}{2x+5}\right)\cdot\left[2x^2-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x^2+4}{2x+5}}=e^{-\infty}=0$$

Obtén el valor de los siguientes límites:

a) $\underset{x\to-\infty}{lím} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}$ b) $\underset{x\to+\infty}{lím}\left[\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

Solución:

a) $\underset{x\to-\infty}{lím} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}} = \underset{x\to+\infty}{lím} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

b) $\underset{x\to+\infty}{lím}\left[\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right] = \underset{x\to+\infty}{lím} \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)-x^3(x+2)}{(x+2)(x^2-1)} = \underset{x\to+\infty}{lím} \dfrac{x^4-1-x^4-2x^3}{x^3+x+2x^2+2} =$

$$= \underset{x\to+\infty}{lím} \frac{-2x^3-1}{x^3+2x^2+x+2} = -2$$

Halla el límite:

$$\underset{x\to0}{lím}\left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}}$$

Solución:

$$\underset{x\to0}{lím}\left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}} = e^{\underset{x\to0}{lím}\left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1}-1\right)\cdot\frac{3}{x}} = e^{\underset{x\to0}{lím}\left(\frac{x^2-3x+1-5x-1}{5x+1}\right)\cdot\frac{3}{x}} = e^{\underset{x\to0}{lím}\frac{x^2-8x}{5x+1}\cdot\frac{3}{x}} = e^{\underset{x\to0}{lím}\frac{3x(x-8)}{x(5x+1)}} =$$

$$= e^{\underset{x\to0}{lím}\frac{3(x-8)}{5x+1}} = e^{-24}$$

Halla los límites:

a) $\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}$ b) $\underset{x\to-\infty}{lím}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x}$

Solución:

a) $\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)\cdot 2x} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\right)\cdot 2x} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{6x}{x^2-2}} = e^0 = 1$

b) $\underset{x\to-\infty}{lím}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x} = \underset{x\to+\infty}{lím}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2-9x}\right)^{-x} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\infty} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{+\infty} = 0$

2. Ídem:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{4x^2 + 2} = \frac{3}{4}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x + 2}{x^2 + x + 2} = 0$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 2} = \infty$

e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x + 1} = -\infty$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 3}{x} = \infty$

g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3 - x}{2x^3 + 2x} = 2$

h) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x =$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} =$

j) $\lim_{x\to\infty} \frac{8^x}{2^{2x}} = 0$

k) $\lim_{x\to 2} \frac{8^x}{2^{2x}} =$

l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x + 2}{x^5 + 7x^2 + 3} = 0$

m) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^6} = 0$

n) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1}\right) = -2$

o) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

p) $\lim_{x\to\infty} 5^{-x} = 0$

q) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x}{5x^2 + x} = \frac{3}{5}$

r) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 5}{3x^3 + 2x^2 - 3x - 1} = \frac{5}{3}$

s) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1$

t) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + x}{3x^4 + 2} = \frac{1}{3}$

u) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^7 + 6x^2 - 2x}{3x^2 + 4x^4 + 1} = \infty$

1. Comprobar los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 4}{x - 1} = 8$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x}{x^2 - x} = 1$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 4$

f) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = 0$

g) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 9} = \pm\infty$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \pm\infty$

i) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 4$

j) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 10} = -4$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x^5} = \pm\infty$

l) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^4} = \infty$

m) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 2x - 21}{x(x-3)} = \frac{25}{3}$

n) $\lim_{x\to 1} \frac{2x - 1}{x - 1} = \pm\infty$

o) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2 - 4x - 8}{x^2 - 3x + 2} = 12$

p) $\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3}} = \frac{2}{3}a$

q) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$

r) $\lim_{x\to 2} \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

3. a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-2x^3 + 3x^2 - 5}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^3 - 2x + 5}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-2x^3 + 3x - 7}$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{1}{4}$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{x+7}}{x^2 + 3x} = 3$

g) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 0$

h $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \frac{1}{2}$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{\sqrt{x^4 - 3}} = \infty$

j) $\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x}\right) = \frac{1}{2}$

k) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{24}$

4. a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=-1$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\pm\infty$

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)=\infty$

d) $\lim_{x\to 3}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-3)^2}-\frac{(x+2)^2}{x-3}\right]=\infty$

e) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}-\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)=-\infty$

f) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+1}{x-1}-\frac{2x-1}{x^2-1}\right)=\pm\infty$

g) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)=1$

h) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^x$

i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^x$

j) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}$

k) $\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x^3}=0$

l) $\lim_{x\to\infty}\left(e^x-x^3\right)$

m) $\lim_{x\to\infty}\left(x^5-2^x\right)$

n) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x-1}=\frac{1}{e^4}$

o) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+3}=e^2$

p) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}=e^{-3}$

q) $\lim_{x\to 6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{1/(x-6)}=e^{7/2}$

r) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2-3}$

s) $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

t) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$

u) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{\ln x}$

v) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2^x}{\ln x}$

w) $\lim_{x\to\infty}\left(2^x-\sqrt{x^2+1}\right)$

x) $\lim_{x\to\infty}\left(\ln x-x\right)$

y) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$

z) $\lim_{x\to\infty}\left(\log x\right)^{1-3x}=0$

α) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-1/2}=1/\sqrt{e}$

β) $\lim_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$

γ) $\lim_{x\to\infty} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}=\infty$

(S) 10. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 1\\ ax+3 & \text{si } 1<x\le 2\\ bx^3-2 & \text{si } x>2\end{cases}$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en x=1 y x=2

(Soluc: a=-1, b=3/8)

(S) 11. Dar un ejemplo de una función f(x) definida para todo x que no tenga límite cuando x→2

(S) 12. Discutir $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{ax}\right)$ en función de los valores del parámetro **a**

(Soluc: 0 si a=3; -∞ si a>3; ∞ si a<3)