EJERCICIOS DE CONTINUIDAD Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

1º) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

La función está definida para todos los reales: D(f)=$\mathbb{R}$
Tanto a la derecha como a la izquierda de x=2, la función es continua ya que ambos son polinomios. Estudiamos el punto de unión.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x+3 = 5 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2+1 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \exists \lim_{x\to 2} f(x) = 5 \text{ ; como } f(2) = 5, \text{la función es continua en } R$$

2º) Idem para:

$$f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x+2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

La función está definida para todos los reales: D(f)=R
Tanto a la derecha como a la izquierda de x=1, la función es continua ya que ambos son polinomios. Estudiamos el punto de unión.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 9 - x^2 = 8 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x+2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \nexists \lim_{x\to 1} f(x) \quad \to \text{la función no es continua en } \ x = 1$$

La función es continua en $\mathbb{R}$-{1}

3º) Calcula los valores de a y b para que f(x) sea continua en su dominio

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ ax+b & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ x^2-b & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

sol: La función está definida en todo R, D(f)=R. En cada uno de los tramos, la función es continua puesto que viene dada por polinomios. Queda estudiar los puntos de unión e imponer que sea continua para averiguar qué valores de a y b lo verifican.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2} -2x+1 = 5 \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2} ax+b = -2a+b \end{array}\right\} \text{para que exista } \lim_{x\to -2} f(x) \Rightarrow -2a+b = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} ax+b = 2a+b \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 - b = 4-b \end{array}\right\} \text{para que exista } \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow \ 2a+b = 4-b \Leftrightarrow 2a+2b = 4$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: a=-1 y b = 3 y con estos valores:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 5 = f(-2) \rightarrow f(x) \ \text{ es continua en } x = -2$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 = f(2) \rightarrow f(x) \ \text{ es continua en } x = 2$$

Por lo que: si a=-1 y b=3, f(x) es continua en su dominio.

4º) Idem para:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & \text{si } x<-1 \\ x^2-4 & \text{si } -1\le x<2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Sol: a=-2; b=1

5º) El tipo de interés anual, I(t) en %, ofrecido por una entidad financiera, depende del tiempo t, en años, que se esté dispuesto a mantener la inversión, viene dado por la expresión:

$$I(t)=\frac{90t}{t^2+9}$$

a) Calcular razonadamente cuántos años le conviene pactar a un inversor que trate de optimizar el tipo de interés.

b) Si una inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el tipo de interés podría llegar a ser negativo? Justifica la respuesta.

Sol:

a) Se trata de determinar un valor de t para el que la función I(t) presente un máximo.

Para ello, derivamos la función y la igualamos a cero:

$I'(t)=\frac{90(t^2-9)-2t\cdot 90t}{(t^2+9)^2}=\frac{-90(t^2-9)}{(t^2+9)^2} \quad \rightarrow \quad I'(t)=0 \Leftrightarrow t=3 \text{ y } t=-3$ como t no puede ser -3 estudiamos si t=3 es un máximo

$I''(t)=180\,t\frac{(t^2-27)}{(t^2+9)^3}$; $I''(3)=-\frac{5}{3}<0$ → t=3 es un máximo

Por lo que el tiempo t óptimo a mantener la inversión es de 3 años. En estas condiciones, el tipo de interés será: $I(3)=\frac{90\cdot 3}{9+9}=15\%$

b) La función es continua en todo su dominio y a partir de t = 3 es decreciente. Además, no presenta más máximos o mínimos que los calculados. Pero como $\lim_{x\to\infty} I(t)=0$

la función tiene una asíntota horizontal en y=0. Lo que significa que la función I(t) va disminuyendo hacia cero pero nunca llega a tomar valores negativos.

6º) Un taller artesanal está especializado en la producción de cierto tipo de juguetes. Los costes de fabricación, C(x) en pesetas, están relacionados con el número de juguetes fabricados, x, a través de la siguiente expresión:

$C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$

El precio de venta de cada juguete es de 8000 pesetas.

a) Plantear la función de ingresos que obtiene el taller con la venta de los juguetes producidos.

b) Plantear la función de beneficios, entendidos como diferencia entre ingresos y costes de fabricación.
c) ¿Cuántos juguetes debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

Sol: a) La función de ingresos vendrá dada por los ingresos totales de las ventas.

I(x) = 8000x

b) La función de beneficios (B(x)) vendrá dada por los ingresos totales de las ventas menos los costes de fabricación.

$B(x) = 8000x - C(x); 8000x - (10x^2 + 2000x + 250000) = -10x^2 + 6000x - 250\,000$

Se trata de encontrar un máximo en la función de beneficios y de determinar su valor:

$B'(x) = -20x + 6000$; $B'(x) = 0 \rightarrow x = 300$; $B''(x) = -20 < 0 \rightarrow$ Máximo

$B(300) = -10 \cdot 3002 + 6000 \cdot 300 - 250000 = 650\,000$

Es decir: los beneficios serán máximos al fabricar 300 juguetes, y en estas condiciones, alcanzarán las 650 000 pesetas de beneficio..

7º) Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & \text{si} \quad x > 30 \end{cases}$$

a) Justificar que la función T es continua en todo su dominio.
b) ¿Se puede afirmar que cuánto más se entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?
c) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿y en menos de 2?

Sol: Se trata de una función definida a trozos. En cada uno de ellos la función es continua, puesto que los valores que anulan el denominador se encuentran fuera de cada intervalo (x=-30 $\notin [0,30]$ $y : x = 5\ y\ x = 15$ no pertenecen al $(30,\infty)$; bastará con analizar el punto de unión x = 30.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 30^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 30} \dfrac{300}{x+30} = 5 \\ \lim\limits_{x\to 30^+} T(x) = \lim\limits_{x\to 30} \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 30} T(x) = 5 = T(30) \rightarrow T(x) \text{ es continua en } x = 30$$

Por lo que T(x) es continua en todo su dominio.

b) se trata de saber si la función es decreciente en cada tramo. Estudiamos el signo de la primera derivada.

Tramo I: $T'(x) = \frac{-300}{(x+3)^2} < 0 \; \forall x \in [0,30] \rightarrow T(x)$ es decreciente en $[0,30]$

Tramo II: $T'(x) = \frac{-1125(2x-20)}{(x^2-20x+75)^2} < 0 \; \forall x \in (30,\infty) \rightarrow T(x)$ es decreciente en $(30,\infty)$

Dado que la función es decreciente en su dominio, podemos afirmar que cuanto más entrene un deportista, menor será el tiempo que tarde en realizar la prueba.
(Se entiende que nadie puede entrenar un número infinito de días y que por mucho que entrene, existe un límite inferior al tiempo empleado)
Como el menor número de días que puede entrenar alguien es x=0 y T(0) = 10, nadie tardará más de 10 minutos aunque no entrene.

c) Para averiguar cuál será el menor tiempo posible para realizar la prueba, bastará recordar que la función es decreciente y si hacemos x muy grande, vemos que tiene una asíntota horizontal en y=2, es decir el tiempo empleado, tenderá a 2m pero no llegará a alcanzar este valor. Por lo que nadie podrá emplear: ni 2 m, ni menos de 2m.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 = 2$$

8º) Los beneficios totales que se obtienen al vender cierto producto, dependen del precio de venta del mismo, pues éste condiciona el número de unidades que se venderán. Se ha determinado que, si el precio al que vende cada artículo es x euros, sus beneficios vendrán dados por la fórmula:

$B(x) = 12x - 2x^2 - 12$, en miles de euros por día.

a) Representa la función precio-beneficio. Indica a qué precios podría venderse el artículo sin sufrir pérdidas.
b) ¿A qué precio se obtiene la ganancia máxima? ¿A cuánto asciende?

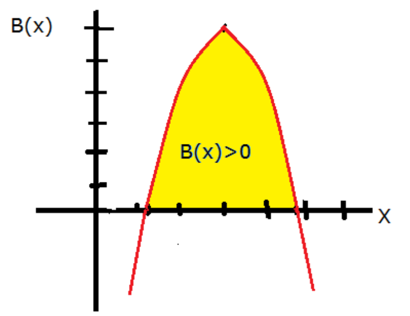
Sol: a) Es una parábola invertida con vértice en el punto V(3,6). Como estamos representando el beneficio en función del precio, el beneficio se representa en el eje y. Nos piden los valores de "x" (precio) para los que "B(x)" (beneficio) es positivo.

Lo resolvemos gráficamente. Hallamos los valores de x para los que y vale cero.

$-2x^2+12x-12=0 \Leftrightarrow x_1=3+\sqrt{3}$ y $x_2=3-\sqrt{3}$

Por lo que el precio al que se puede vender el artículo sin sufrir pérdidas será:

$x \in [3-\sqrt{3}\,,\; 3+\sqrt{3}]$



b) Como el máximo se da para x=3, el precio al que se obtiene la ganancia máxima será de 3 euros.
La ganancia ascenderá a: $B(3)= 12\cdot3 - 2\cdot3^2 - 12= 6$. Es decir: 6000€
Nota: Si lo hacemos derivando e igualando a cero, obtenemos el mismo resultado.

9º) Sea la función: $h(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$

a) Halla los valores de a y b de forma que h(x) tenga un máximo en x = 1 y un mínimo en x = 2.

Sol:
Si h(x) tiene un máximo en x=1, quiere decir que h´(1)=0 y h´´(1)<0

$h´(x) = 6x^2 + 2bx + a$; h´(1) = 6+2b+a ; h´(1)=0 → 2b+a = -6

Si h(x) tiene un mínimo en x=2, quiere decir que h´(2)=0 y h´´(2)>0

h´(2) = 24 + 4b +a; h´(2) =0 → 4b+a = -24
Resolviendo el sistema se tiene que: a= 12 y b= -9

Sustituyendo estos valores en la segunda derivada comprobamos si se cumplen los requisitos.

h´´(x)= 12x +2b; h´´(1) = 12 + 2b =12-18=-6<0 por lo que x=1 es un máximo
h´´(x)= 12x +2b; h´´(2) = 24 + 2b =24-18= 6>0 por lo que x=2 es un mínimo

Luego: si a= 12 y b = -9, h(x) tiene un máximo en x=1 y un mínimo en x=2.

10º) Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R(x) en miles de pesetas, viene dada en función de la cantidad que se invierta, x en miles de ptas., por medio de la siguiente expresión:

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5$$

a) Deducir razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.
b) ¿Qué rentabilidad obtendría?

Sol:
a) Se trata de determinar un valor de x para el que la función R(x) presente un máximo. Podemos hacerlo de dos maneras:
I) Tener en cuenta que se trata de una parábola y determinar su eje y orientación:

· eje parábola: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0,5}{2\cdot(-0,001)} = 250 \rightarrow x = 250$

· Orientación: a= −0.001 < 0 → "hacia abajo" o convexa, lo que implica que el máximo está en el vértice. Por tanto, la cantidad a invertir que hace máxima la rentabilidad es 250.000 ptas.

II) Determinar el valor de x que anule la primera derivada:

R´(x) = −0.002x + 0.5 ; R´(x) = 0 → x = 250.
Para comprobar que es un máximo analizamos el signo de la segunda derivada:

R´´(x) = −0.00 2 < 0 ∀ x → R´´(250)<0 → x= 250 es un Máximo.

por tanto, la cantidad a invertir que hace máxima la rentabilidad es 250.000 ptas.

b) Se trata de determinar el valor de la función para x = 250.

$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5$; $R(250) = 65000$ pesetas.

11º) La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 15 \\ \frac{2x}{0{,}2x+3} & \text{si} \quad x > 15 \end{cases}$$

a) Estudiar el crecimiento de esta función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justificar que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.
b) Justificar que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

Sol:
 a) Se trata de una función definida a trozos.
- En el intervalo [0, 15] la función es continua y creciente; se trata de una recta de pendiente m=$\frac{1}{3}$
- En el intervalo (15, ∞) la función es continua, puesto que el valor que anula el denominador se encuentra fuera del intervalo:
Para estudiar el crecimiento, hallamos la primera derivada

$$G'(x) = \left(\frac{2x}{0{,}2x+3}\right)' = \frac{6}{(0{,}2x+3)^2} > 0 \; \forall\, x \;\rightarrow\; es\ creciente\ en\ (15, \infty)$$

Bastará con analizar lo que sucede en el punto de unión x = 15

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 15^-} G(x) = \lim\limits_{x\to 15} \dfrac{x}{3} = 5 \\ \lim\limits_{x\to 15^+} G(x) = \lim\limits_{x\to 15} \dfrac{2x}{0{,}2x+3} = 5 \end{cases}$$

Por tanto la función tiene límite en x=15 y vale 5. Como G(15) =5, la función es continua en x= 15 y por tanto lo es en su dominio.

Como la función es continua y creciente, se verifica que: a valores de x < 15, les corresponderán notas menores a 5 puntos, por lo que el estudiante no aprobará.

b) Vemos lo que ocurre si hacemos x muy grande:

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{0{,}2x+3} = \frac{2}{0{,}2} = 10$$

la función tiene una asíntota horizontal en x=10, por lo que no podrá sobrepasar ese valor.

1. **Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0 \\ \text{Por tanto, } f(x) \text{ es continua en } x_0 = 3. \end{array}$$

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Las derivadas laterales existen} \\ \text{y coinciden.} \end{array}$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

2. **Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

- Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 0, \\ \text{ha de ser: } n = 5 \end{array}$$

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea derivable en } x = 0, \text{ ha} \\ \text{de ser: } -m = 0 \;\; \rightarrow \;\; m = 0 \end{array}$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $f'(x) = 5$?

a) **Si $x \neq 1$,** la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

Continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen y coinciden.}$$

Luego, $f(x)$ es derivable en $x = 1$. Además, $f'(1) = 3$.

Así $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, entonces $x \geq 1$. Es decir:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$, la función es continua y derivable.

Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$

Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden. La función no es continua en $x = 3$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Las derivadas laterales existen, pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 3$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 3$, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ &f(0) = 1 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$