NÚMEROS COMPLEJOS

Al resolver ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$ nos encontramos que las soluciones son de la forma: $x = \pm\sqrt{-1}$ que no tiene solución en los números reales.

Los números complejos nacen de la necesidad de obtener una solución para las ecuaciones de segundo grado con discriminante negativo. Para ello es necesario admitir como número válido a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

Llamamos ***Unidad Imaginaria*** al nuevo número $\sqrt{-1}$ y la denotamos con la letra "**i**"

- $\mathbf{i=\sqrt{-1}}$

Así definido vemos que: $\mathbf{i^2=-1}$

Llamamos **Número Complejo "z"** a toda expresión de la forma: **a+b·i** donde a y b son números reales.

Componentes: La expresión a + bi se le llama **"Forma binómica"** del número complejo ya que está formado por dos partes: **a=Parte real** y **b= Parte Imaginaria.**

El conjunto de todos los números complejos se designa por $\mathbb{C}$

- $\mathbb{C} = \{a+bi \,/ a,b \in \mathbb{R}\}$

Números Reales: de esta forma, podemos ver que los números reales son complejos pues los reales son números complejos cuya parte imaginaria (b) es cero, es decir son de la forma: $a + 0i = a$ luego: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Números imaginarios puros: son los imaginarios cuya parte real (a) es cero: $0 + bi = bi$

Opuesto de un número complejo: Si $z = a + bi$, su opuesto será: $-z = -a - bi$ ya que $z+(-z)=0$.

Conjugado de un número complejo: Si **z** = a + bi, su conjugado se denota como $\bar{z}$ y es el mismo número pero con el signo de la parte imaginaria cambiado, es decir:

$\bar{z}$ a-bi

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Las operaciones con los números complejos en forma binómica se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

SUMA: La suma de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b+b')i

RESTA: La resta de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la resta de las partes reales y cuya parte imaginaria es la resta de las partes imaginarias.

z - z′ = (a + bi) - (a′ + b′i) = a + bi - a′ - b′i = (a - a′) + (b-b′)i

MULTIPLICACIÓN: Se realiza como cualquier producto de binomios

z·z′ = (a + bi)·(a′ + b′i) = a·a′ + a·b′i + ba′i + b.b′i2

= a·a′ + a·b′i + a′·bi – b·b′ = = (a·a′ - b·b′) + (a·b′ + a′·b)i

Nota: Si multiplicamos un número complejo por su conjugado, obtenemos un número real: $z \cdot z = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2\cdot i^2 = a^2 + b^2$

DIVISIÓN: Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi).(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{(a.a'+b.b')+(b.a'-a.b')i}{a'^2+b'^2} = \frac{a.a'+b.b'}{a'^2+b'^2} + \frac{ba'-a.b'}{a'^2+b'^2}i$$

Ejemplo: Si z=2+3i y z´=1-5i

suma: (2+3i)+(1-5i)= 2+3i+1-5i=3-2i

resta: (2+3i)-(1-5i)= 2+3i-1+5i=1+8i

multiplicación: (2+3i) ·(1-5i)= 2·1-2·5i+3i·1-3i·5i=17-7i

división: (2+3i):(1-5i)=$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

POTENCIAS DE i :

$i^2=-1$; $i^3= i^2\cdot i=-i$; $i^4= i^2\cdot i^2=1$; $i^5= i^4\cdot i=i$; $i^6= i^5\cdot i=-1$…….

Como se puede ver, se repiten cada cuatro números, por lo que para calcular i^n, se divide n entre cuatro y obtendremos de resto: r, que será la potencia de i correspondiente (0,1,2,3) $\Rightarrow i^n = i^r$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las sucesivas categorías de números (naturales, enteros, racionales,...) se pueden representar sobre la recta. Los reales la llenan por completo, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y cada punto de la recta, le corresponde un número real. Por eso hablamos de recta real.

Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la recta real al plano complejo.

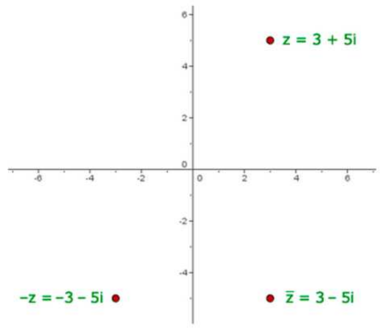
Los números complejos se representan, de forma similar a los vectores, en unos ejes cartesianos. **El eje X se llama eje real** y el **Y, eje imaginario**. El número complejo z = a + bi se representa mediante el punto (a,b) que se llama **afijo**, o mediante un vector de origen (0,0) y extremo (a,b).

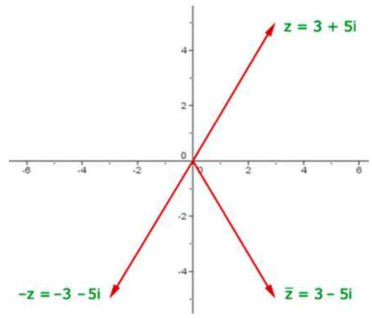
Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real y los de los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

Módulo de un número complejo z es la longitud del vector mediante el cual se representa dicho número. Se designa por r = |z|.

Si z=a+bi el módulo será:

- **r=|z|=**$\sqrt{a^2+b^2}$





Argumento de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real positivo. Se designa: α = arg (z) (0º ≤ α ≤ 360º). Si z=a+bi el argumento será:

- α = arg (z)= arc tg $\frac{b}{a}$

Números complejos en forma polar: De esta manera, un número complejo queda también, perfectamente definido dando su módulo y su argumento y se expresa: $\mathbf{r}_\alpha$

Ejemplo: z=3+4i → r=$\sqrt{3^2+4^2}=5$; α=arc tg $\frac{4}{3}$ =53,13º → z=$5_{53,13º}$

OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

PRODUCTO: Al multiplicar dos números complejos en forma polar obtenemos otro número complejo en forma polar cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos (reduciéndolo a un ángulo entre 0º y 360º)

$\mathbf{r}_\alpha . \mathbf{r'}_{\alpha'} = \mathbf{rr'}_{\alpha+\alpha'}$

COCIENTE: El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo de módulo el cociente de los módulos y por argumento la resta de los argumentos:

$$\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}$$

POTENCIA: La potencia enésima de un número complejo en forma polar es otro número complejo en forma polar de módulo la potencia enésima del módulo y por argumento el argumento multiplicado por n.

$\mathbf{(r_{\alpha})^n} = r_{\alpha}.....r_{\alpha} = (r......r)_{\alpha + ... + \alpha} = (r^n)_{n\alpha}$

RAÍZ: Las n raíces enésimas de un número complejo en forma polar, tienen como módulo, la raíz enésima del módulo y como argumentos: $\frac{\alpha+360º\cdot k}{n}$, con k=0,1,2...n-1

Para n > 2, los afijos de estas n raíces son los vértices de un n-ágono regular con centro en el origen

Ejemplo: sean: $z=4_{30º}$ y $z´=2_{15º}$

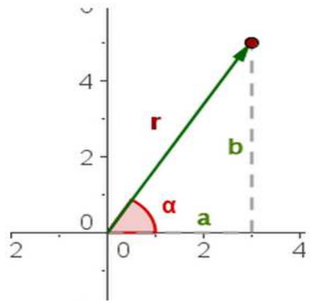
Producto: $z\cdot z´=4\cdot 2_{30º+15º}=8_{45º}$

División: $\frac{z}{z´}=\left(\frac{4}{2}\right)_{30º-15º}=2_{15º}$

Potencia: $z^3=4^3_{3\cdot 30º}=64_{90º}$

Raíz: $\sqrt[3]{z}$: tiene tres raíces: $z_1=(\sqrt[3]{4})_{10º}$; $z_2=(\sqrt[3]{4})_{130º}$; $z_3=(\sqrt[3]{4})_{250º}$

Números complejos en forma trigonométrica:



Si representamos gráficamente el número complejo $z=a+bi$ y aplicando la definición de las razones trigonométricas, vemos claramente que:

$a=r\cdot\cos\alpha$ y $b=r\cdot \text{sen}\,\alpha$

por lo que también podemos expresar el numero complejo a+bi de la forma:

- **z= r(cos α +i sen α)**

llamada **forma trigonométrica** del numero complejo z

FÓRMULA DE MOIVRE

Aplicando las propiedades de la potencia de un número complejo, se obtiene la siguiente fórmula, llamada fórmula de Moivre:

- $\mathbf{(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\,\text{sen}\, n\alpha)}$

de gran utilidad en trigonometría, pues nos permite hallar cos nα y sen nα en función de cos α y sen α.