RESUMEN Y EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA II

Como ya sabemos, uno de los objetivos es que, conocidas las razones trigonométricas (a partir de ahora RT) de unos pocos ángulos, obtener las RT de una gran cantidad de ángulos. Para ello nos vamos a servir de una serie de expresiones que relacionan las RT de ángulos conocidos con las RT que queremos hallar.

En el resumen anterior vimos cómo podíamos obtener las RT de ángulos superiores a 90º conociendo las RT de los ángulos del primer cuadrante, sin más que aplicar las **Fórmulas de paso al primer cuadrante.** En este apartado vamos a aprender las expresiones que nos permiten hallar las RT de un ángulo si lo podemos expresar como suma, resta, doble o mitad de otros ángulos cuyas razones trigonométricas conocemos.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA/DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Supongamos que a y b son dos ángulos de los que conocemos sus razones trigonométricas. Tenemos que:

- sen (a+b)=sen a · cos b + sen b· cos a
- cos (a+b)= cos a· cos b – sen a·sen b
- tg (a+b)= $\frac{\text{tg a + tg b}}{\text{1- tg a ·tg b}}$

Ejercicio 1: calcula las razones trigonométricas de 75 º a partir de las razones de 30º y 45º.

$$sen(75^o)=sen(45^o+30^o)=sen(45)\cdot\cos(30)+\cos(45)\cdot sen(30)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(75^o)=\cos(45^o+30^o)=\cos(45)\cdot\cos(30)-sen(45)\cdot sen(30)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg(75^o)=tg(45^o+30^o)=\frac{tg(45)+tg(30)}{1-tg(45)\cdot tg(30)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$$

Ejercicio 2: Deduce la expresión de la tangente de la suma de dos ángulos a partir de las expresiones para el seno y el coseno de la suma.

$$tg(a+b)=\frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)}\underset{\substack{dividiendo\\ num\ y\ den\ por\\ \cos(a)\cos(b)}}{=}\frac{\frac{sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}=$$

$$=\frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)}$$

A partir de las razones trigonométricas de la suma es sencillo calcular las razones de la diferencia. Sólo hay que relacionar sen(-b) y cos(-b) con sen(b) y cos(b). Pero –b=360-b, y en el tema anterior ya vimos que:

sen(-b)=sen(360-b)=-sen(b)

cos(-b)=cos(360-b)=cos(b)

tg(-b)=tg(360-b)=-tg(b)

por lo que:

sen(a-b)=sen(a+(-b))=sen(a)·cos(-b)+cos(a)·sen(-b)=sen(a)·cos(b)-cos(a)·sen(b)

cos(a-b)=cos(a+(-b))=cos(a)·cos(-b)+sen(a)·sen(-b)=cos(a)cos(b)+sen(a)·sen(b)

$$tg(a-b) = tg(a+(-b)) = \frac{tg(a)+tg(-b)}{1-tg(a)\cdot tg(-b)} = \frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)\cdot tg(b)}$$

en resumen:

- sen (a-b)=sen a · cos b - sen b· cos a
- cos (a-b)= cos a· cos b + sen a·sen b
- tg (a-b)= $\frac{\text{tg a - tg b}}{\text{1+tg a ·tg b}}$

Ejercicio 3: Calcula las razones trigonométricas de 15 º a partir de las razones de 30º y 45º.

$$sen(15^o) = sen(45^o-30^o) = sen(45)\cdot\cos(30) - \cos(45)\cdot sen(30) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(15^o) = \cos(45^o-30^o) = \cos(45)\cdot\cos(30) + sen(45)\cdot sen(30) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$tg(15^o) = tg(45^o-30^o) = \frac{tg(45)-tg(30)}{1+tg(45)\cdot tg(30)} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 2-\sqrt{3}$$

■ RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE Y MITAD.

Vamos a expresar las razones trigonométricas del ángulo doble, 2a, en función de las del ángulo a. Para calcularlo utilizamos las razones trigonométricas de la suma teniendo en cuenta que:

2 a = a + a

$$sen(2a) = sen(a+a) = sen(a)\cdot\cos(a) + \cos(a)\cdot sen(a) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos(a)\cdot\cos(a) - sen(a)\cdot sen(a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$

$$tg(2a) = \frac{tg(a)+tg(a)}{1-tg(a)\cdot tg(a)} = \frac{2\cdot tg(a)}{1-tg^2(a)}$$

en resumen:

- sen (2a)=2sen a $\cdot\cos a$
- cos (2a)= $\cos^2$ a - sen^2 a
- tg (2a)= $\frac{2\text{tg a}}{1-\text{tg}^2 \text{ a}}$

Ahora vamos a encontrar una expresión de las razones trigonométricas del ángulo mitad, a/2, en función de el ángulo a. Para calcularlo utilizaremos la razón trigonométrica del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)=1-sen^2(x)-sen^2(x)=1-2sen^2(x) \quad\rightarrow\quad sen(x)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)=\cos^2(x)-\left(1-\cos^2(x)\right)=2\cos^2(x)-1 \quad\rightarrow\quad \cos(x)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

llamando 2x = a → x = a/2, y sustituyendo en las fórmulas tenemos:

- sen $\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$
- cos $\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$
- tg $\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

Ejercicio 4: Calcula las RT del ángulo de 90º en función del ángulo de 45º.

Como 90º = 45º + 45º, tenemos que:

sen (90º)= sen (45º + 45º) =2sen 45º $\cdot\cos 45º$ = 2 $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ =1

cos (90º)= $\cos^2$ 45º - sen^2 45º = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ - $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ = 0

tg (90º)= $\frac{2\text{tg } 45º}{1-\text{tg}^2\ 45º}=\frac{2\cdot 1}{1-1}\rightarrow\infty$

Ejercicio 5: Calcula las RT del ángulo de 15º en función de las de 30º.

como 30º = 15º/2

sen 15º = sen $\frac{30º}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

cos 15º = cos $\frac{30º}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

tg 15º = tg $\frac{30º}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30}{1+\cos 30}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

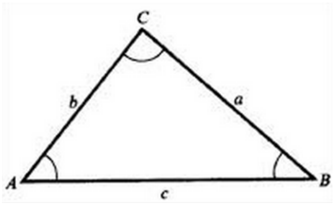
En el resumen anterior aprendimos las características de los triángulos rectángulos y a calcular todos sus elementos y aplicamos esos conocimientos para resolver diversos problemas métricos. Sin embargo hay ciertas situaciones en que este planteamiento no nos sirve para resolver el problema métrico planteado. Por ello necesitamos otras estrategias que nos permitan localizar todos los elementos de cualquier tipo de triángulo, sea rectángulo o no. Estas estrategias se resumen en los teoremas llamados del seno y del coseno (ya demostrados en clase).

- TEOREMA DEL SENO

En todo triángulo, la proporción entre sus ángulos y los lados que se les oponen es constante.

es decir:

- $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

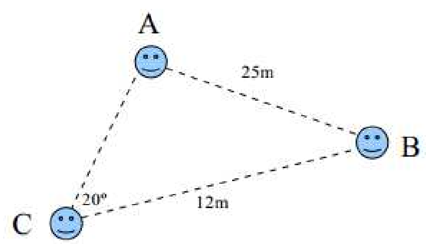


Esta expresión nos da una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo cualquiera y:

1. Se aplica para cualquier triángulo.
2. Permite resolver un triángulo cuando conocemos dos ángulos y un lado.
3. Permite resolver un triángulo cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Ejercicio 6:

Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 metros, y entre Berto y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20º. Calcula la distancia entre Alberto y Camilo



Aplicando el teorema del seno:

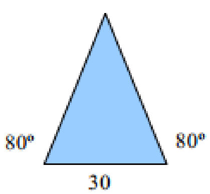
$\dfrac{25}{\text{sen } 20º} = \dfrac{12}{\text{sen } \hat{A}} \Leftrightarrow 73{,}10 = \dfrac{12}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \text{sen}\hat{A} = 0{,}16 \rightarrow \hat{A}$ arc sen $0{,}16 = 9{,}45º$

$\hat{B} = 180º - (20º + 9{,}45º) = 150{,}55º \rightarrow \text{sen } 150{,}55º = 0{,}49$

$\dfrac{25}{\text{sen } 20º} = \dfrac{b}{\text{sen } 150{,}55º} \rightarrow b = 73{,}10 \cdot 0{,}49 = 35{,}94\text{m}$

Ejercicio 7:

Los flancos de un triángulo forman un ángulo de 80º con la base. Si el triángulo tiene 30 centímetros de base, calcula la longitud de sus lados.

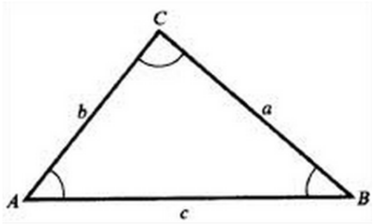


El ángulo que falta mide 180º – (80º + 80º) = 20º

$$\frac{30}{\text{sen } 20º} = \frac{x}{\text{sen } 80º} \rightarrow x=0{,}98 \cdot \frac{30}{0{,}34} = 86{,}39 \text{ cm}$$

- <u>TEOREMA DEL COSENO</u>

Hay ocasiones en las que el teorema del seno no nos resuelve el problema y tenemos que acudir a otra expresión que nos relaciona los lados y los ángulos de un triángulo y que se conoce como el teorema del coseno.

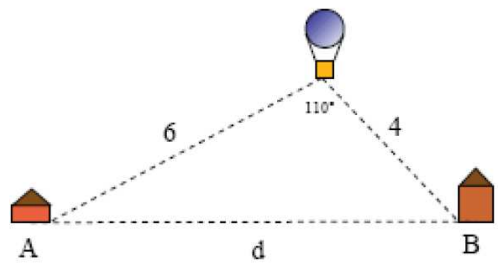


- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

1. Se aplica para cualquier triángulo.
2. Permite resolver un triángulo cuando conocemos los 3 lados.
3. Permite resolver un triángulo cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
4. Permite resolver un triángulo cuando conocemos dos lados y el ángulo que forman.

<u>Ejercicio 8:</u>

Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50º, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60º. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.

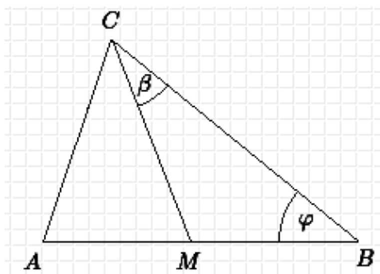


Aquí tendremos que usar el teorema del coseno, porque el ángulo que conocemos es el que forman los dos lados de los cuales tenemos su longitud.

$d^2 = 6^2 + 4^2 - 2·6·4·\cos 110º$
$d^2 = 52 - 48·(-0{,}34) \rightarrow d^2 = 52 + 16{,}32 \rightarrow d = 8{,}27\text{Km}$

<u>Ejercicio 9:</u>

En la figura plana adjunta, M es el punto medio entre A y B. Se conoce BC= 2 metros y los ángulos β = 30° y φ= 45°. Calcula AC.



En el triángulo CBM el ángulo que falta mide

$\widehat{CMB} = 180º - (30º+ 45º) = 105º$

$$\frac{2}{\text{sen } 105º} = \frac{\overline{MB}}{\text{sen } 30º} \longrightarrow \overline{MB}=\text{sen } 30º \frac{2}{\text{sen } 105º} \longrightarrow \overline{MB} = 1{,}035\text{m}$$

por el mismo método averiguamos el lado $\overline{CM}$ = 1,46 m

como M está en el punto medio de AB, $\overline{AM}$ = 1,035m y además, el ángulo $\widehat{AMC}$ es el suplementario de 105º es decir, mide 75º. Aplicando el teorema del coseno averiguamos AC:

$$\overline{AC}^2=(1{,}46)^2+ (1{,}035)^2 -2·1{,}46·1{,}35·\cos 75º = 2{,}42 \rightarrow AC=1{,}55\text{m}$$