DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Se llama **variable aleatoria** a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral E un número real. Una variable aleatoria discreta es aquella que sólo puede tomar valores enteros (Por ejemplo: el número de aprobados en una determinada asignatura). Una variable aleatoria continua es aquella que puede tomar todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real (por ejemplo: el peso de un determinado grupo de pacientes).

La Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X, es una aplicación que asocia a cada valor de x_i de la variable su probabilidad p_i**.**

La Función de distribución de una variable aleatoria discreta es una aplicación que asocia a cada valor de la variable aleatoria la probabilidad acumulada hasta ese valor. Es decir: $F(X)=P(X\leq x_i)$

En el caso de variables aleatorias continuas tenemos que hablar de **Función densidad de probabilidad**

Una distribución de probabilidad de una variable aleatoria X es el conjunto de pares ordenados (X , f(X)) donde f(X) es la función de probabilidad de X (si X es discreta) o función densidad de probabilidad de X (si X es continua). Una distribución de probabilidad puede estar dada por una tabla, una gráfica o una expresión matemática (fórmula) que da las probabilidades con que la variable aleatoria toma diferentes valores.

1. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Un experimento sigue el modelo de la distribución binomial si:

1. En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados: el suceso A (éxito) y su contrario $\bar{A}$.
2. La probabilidad del suceso A es constante, es decir, que no varía de una prueba a otra. Se representa por p.
3. El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.

Variable aleatoria binomial: La variable aleatoria binomial, X, expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba del experimento.
La variable binomial es una variable aleatoria discreta, por lo que, si hemos realizado n pruebas, sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, ..., n.

La distribución binomial se suele representar por B(n, p), donde:

- n es el número de pruebas de que consta el experimento.
- p(A)=p es la probabilidad de éxito.
- La probabilidad de $\bar{A}$ es 1− p, y la representamos por q.

La función de probabilidad viene dada por:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

Donde:
n es el número de pruebas
k es el número de éxitos.
p es la probabilidad de éxito.
q es la probabilidad de fracaso

El número $C_m^n = \binom{m}{n}$ se llama también **número combinatorio** y se calcula:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}; \text{ con } \quad m! = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

La **media** y la **varianza** de una distribución bnomial, se calculan:

- $\bar{x} = n\cdot p$
- $\sigma^2 = n\cdot p\cdot q$

EJERCICIOS

1º) Un examen consta de 10 preguntas a las que hay que contestar si o no. Suponiendo que no se saben las respuestas y se contesta al azar, halla:

a) probabilidad de obtener 5 aciertos
b) probabilidad de obtener algún acierto
c) probabilidad de obtener más de 7 aciertos

Es una B(10, 0,5)

a) p(X=5)= $\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}244$
b) 1-p(X=0)=0,9990
c) p(X>7)= p(X=8)+p(X=9)+p(X=10)

2º) El 53% de los trabajadores de una determinada empresa son mujeres. Si elegimos 8 personas de esa empresa al azar, calcula la probabilidad de que haya:
a) Alguna mujer.
b) Más de 6 mujeres.
Halla la media y la desviación típica.

a) $p(X\neq 0)= 1-p(X=0) = 1-0{,}47^8$
b) p(X>6)= p(X=7) +p(X=8)
c) $\mu=np=4{,}24$; $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=1{,}41$

3º) La probabilidad de que un determinado juguete salga defectuoso es de 0,03. Calcula la probabilidad de que en un lote de 60 de estos juguetes haya:
a) Alguno defectuoso.
b) Menos de dos defectuosos.
c) Halla la media y la desviación típica.
Solución:
Si llamamos x = "nº de juguetes defectuosos en un lote", se trata de una distribución binomial con n =60; p = 0,03: B(60; 0,03)
a) $P(X\neq 0)= 1-p(X=0) = 1- 0{,}97^{60}$
b) P(X=1)+p(X=2)
c) Hallamos la media y la desviación típica: $\mu=60*0{,}03=1{,}8$;
$\sigma=\sqrt{60*0{,}03*0{,}97}=1{,}32$

2. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Variable aleatoria de la distribución normal

Una **variable aleatoria continua**, **X**, sigue una **distribución normal** de **media μ** y **desviación típica σ**, y se designa por **N(μ, σ)**, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La variable puede tomar cualquier valor real
2. La **función de densidad** de probabilidad, es la expresión en términos de ecuación matemática de la **curva de Gauss**:

- $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

El área del recinto determinado por la función f(x) y el eje de abscisas **es igual a la unidad**.
Al ser **simétrica** respecto al eje que pasa por **x = μ**, deja un **área igual a 0.5 a la izquierda y otra igual a 0.5 a la derecha**.

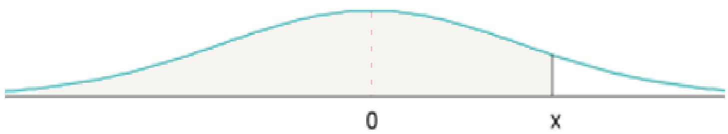
- La distribución N (0, 1)

La **distribución normal estándar, o tipificada o reducida,** es aquella que tiene por **media** el valor **cero, μ = 0**, y por **desviación típica la unidad, σ =1**. Es decir: N (0,1)

Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Y su gráfica:



La probabilidad p(X ≤ k) viene dada por el área del recinto sombreado en la figura. Estos valores están tabulados Y para calcular la probabilidad utilizaremos dicha tabla. Como no podemos elaborar una tabla para cada una de las funciones de probabilidad, se ha elaborado para la función de variable Z que sigue una distribución N(0,1). La **tabla** nos da las **probabilidades de P(z ≤ k)**, siendo **z** la variable tipificada.

Para poder utilizar la tabla tendremos que transformar nuestra variable X que sigue una distribución **N(μ,σ)** en otra variable **Z** que siga una distribución **N(0,1)**. Este proceso se llama:

- Tipificación de la variable

Y consiste en hacer un cambio de variable de la siguiente forma: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

- Tabla de la curva normal (0, 1):

normal	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

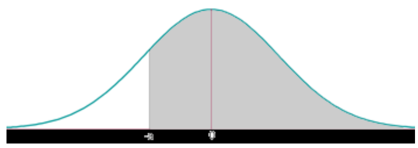
Búsqueda en la tabla de valor de k

Unidades y décimas en la columna de la izquierda.
Centésimas en la fila de arriba.

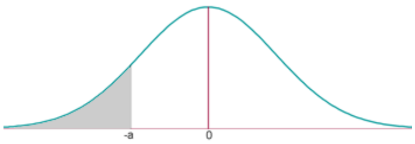
Ejemplo: $P(z \leq 1{,}76) = 0{,}9608$

P(Z ≤ a)

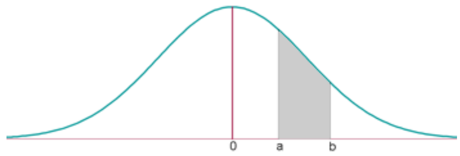
P(Z > a) = 1 - P(Z ≤ a)



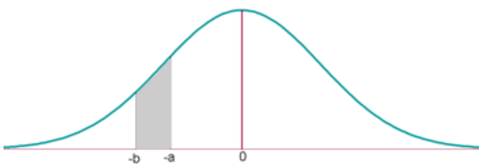
P(Z ≤ −a) = 1 − P(Z ≤ a)



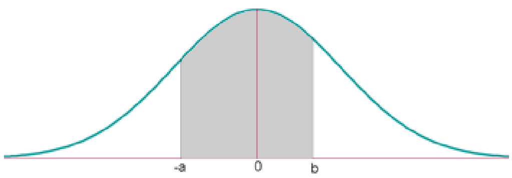
P(a < Z ≤ b) = P(Z ≤ b) − P(Z ≤ a)



P(−b < Z ≤ −a) = P(a < Z ≤ b)



P(−a < Z ≤ b)=P(Z ≤ b)−[1−P(Z ≤ a)]



Si por el contrario conocemos el valor de la probabilidad hasta un determinado valor de la variable tipificada que no conocemos, y tenemos que averiguar valor correspondiente de la variable X, tenemos que recorrer el camino inverso. Ahora tenemos que buscar en la tabla el valor que más se aproxime a la probabilidad dada y localizamos el valor de la variable **z** que le corresponde. Una vez localizado, lo sustituimos en la expresión de la variable tipificada y despejamos X, deshaciendo así el cambio de variable.

EJERCICIOS

4º) La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:

1. Menos de 64 kg.
2. Más de 90 kg.
3. Entre 60 kg y 75 kg.
4. 64 kg.
5. 64 kg o menos.

1. $p(x < 64) = p\left(Z < \dfrac{64-70}{3} \right) = p(Z < -2) = 1 - p(z \leq 2) = 1 - 0{,}7772$

2. $p(x>90)=p\left(Z>\frac{90-70}{3}\right)=p(Z>6{,}667)=1-p(Z<6{,}667)\approx 0$

3. $p(60<x<75)=p\left(\frac{60-70}{3}<z<\frac{75-70}{3}\right)=p(-\frac{10}{3}<z<\frac{5}{3})=p(z<\frac{5}{3})-p(z<-\frac{10}{3})=$

$=p(z<\frac{5}{3})-\left[1-p(z<\frac{10}{3})\right]$ = 0.9525-(1-0.9996)= 0.9525-0,0004=0,9521

4. P(x=64)=0

5. igual que el apartado 1.

5º) Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 36. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

$$p(x>72)=p\left(Z>\frac{72-78}{6}\right)=p(Z>-1)=p(Z<1)=0{,}8413$$

6º) Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15. Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

$$p(95<x\le 110)=p\left(\frac{95-100}{15}<Z\le\frac{110-100}{15}\right)=p(-0{,}33<Z\le 0{,}67)=p(Z\le 0{,}67)-[1-p(Z\le 0{,}33)]$$

=0,7486-(1-0,6293)=0,3779 ⇨37,79% de la población

7º) Las calificaciones de los 500 aspirantes presentados a un examen para contratación laboral, se distribuye normalmente con media 6'5 y varianza 4.

a) Calcule la probabilidad de que un aspirante obtenga más de 8 puntos.
b) Determine la proporción de aspirantes con calificaciones inferiores a 5 puntos.
c) ¿Cuántos aspirantes obtuvieron calificaciones comprendidas entre 5 y 7'5 puntos?

Sol: a) p(x>8)=0,2266; b) p(x<5)=0,2266 →22,66% c) p(5<x<7,5)=0,4649 → 232

8º) La probabilidad de que un alumno de 2º de Bachillerato apruebe las Matemáticas es de 0’7. Si consideramos un grupo de 8 alumnos,

a) ¿cuál es la probabilidad de que cinco de ellos aprueben las Matemáticas?.
Si éxito = “aprobar” y fracaso = “suspender”, entonces p = 0’7 y q = 0’3.
Tenemos, por tanto, una Bin(8;0’7).

$$p(X=5)=\binom{8}{5}\cdot(0'7)^5\cdot(0'3)^3=0'254$$

b) a) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben como mucho 2 alumnos?

$$p(X\le 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=0'0001+0'0012+0'01=0'1013$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben entre 3 y 6 alumnos (inclusive)?.

$$p(3\le X\le 6)=p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)+p(X=6)=$$
$$=0'0467+0'1361+0'2541+0'2965=0'7334$$