LOGARITMOS

Definición: Llamamos **logaritmo** en base a de un número b y lo denotamos por $\mathbf{log_a\, b}$, al número **x** que cumple que: $\mathbf{a^x = b}$. Es decir:

- $\mathbf{log_a\, b = x \iff a^x = b}$

Si en la exponencial, nos daban una base y nos preguntábamos cuál era el resultado de elevar esa base a una determinada cantidad, en el logaritmo, para esa misma base, nos dan el resultado y nos preguntamos a qué exponente tendríamos que elevar la base para que diera ese resultado. El logaritmo, deshace lo que hace la exponencial, es su función inversa. Por tanto sus propiedades se derivan de las propiedades de la exponencial.

Propiedades:

De la definición de logaritmo podemos deducir:

1) No existe el logaritmo de un número negativo.

ello implicaría que $a^x < 0$ lo que es imposible, por lo tanto: **b>0**

2) El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base).

$\mathbf{log_a\, 1 = x \iff a^x = 1 \Rightarrow \forall\, a \rightarrow x = 0}$

3) El logaritmo en base a de a es uno.

$\mathbf{log_a\, a = x \iff a^x = a \Rightarrow x = 1\ \forall\, a}$

4) El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.

$\mathbf{log_a\, a^n = x \iff a^x = a^n \Rightarrow x = n\ \forall\, a}$

5) No existe el logaritmo de un número con base negativa.

Dado que el logaritmo es la función inversa de la exponencial, el domino del logaritmo es el recorrido de la exponencial es decir, $\mathbb{R}^+$ por lo tanto, **a>0**

Si a < 0, para determinados valores de x como por ejemplo x= $\frac{1}{2}$, implicaría calcular raíces de índice par de número negativos. $(-a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-a}$

Tienen especial importancia los logaritmos en base 10, se llaman logaritmos decimales y y los logaritmos cuya base es el número **e,** llamados logaritmos Neperianos. Se denotan como:

- $\mathbf{\log x = \log_{10} x}$
- $\mathbf{\ln x = \log_e x}$ e=2,718281828459045……….., Número de Euler

Operaciones con logaritmos

I) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

- $\mathbf{log_a\, (x \cdot y) = log_a\, x + log_a\, y}$

II) El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

- $\mathbf{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$

III) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

- $\mathbf{\log_a x^n = n \cdot \log_a x}$

IV) Cambio de base:

Dado que sólo están tabulados los logaritmos decimales y los neperianos, cuando queramos calcular un logaritmo en base distinta de 10 o de e, hacemos uncambio de base de la siguiente manera:

- $\mathbf{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$

V) • $\mathbf{(\log_a b) \cdot (\log_b a) = 1}$

EJEMPLOS:

1º) $\log_2 8 = x \longrightarrow 2^x = 8 = 2^3 \longrightarrow x = 3$

2º) $\log_3 81 = x \longrightarrow 3^x = 81 = 3^4 \longrightarrow x = 4$

3º) $\log_4 2 = x \longrightarrow 4^x = 2 \longrightarrow 2^{2x} = 2 \longrightarrow 2x = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$

4º) $\log 6 = \log\ (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}3010 + 0{,}4771 = 0{,}7781$

5º) $\log 8 = \log\frac{16}{2} = \log 16 - \log 2\ = 1{,}2040 - 0{,}3010 =\ 0{,}9031$

6º) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \cdot 0{,}3010 = 0{,}9030$

7º) $\log_3 16 = \frac{\log 16}{\log 3} = \frac{1{,}2041}{0{,}4771} = 2{,}5238$

<u>EJERCICIOS</u>

1º) Calcula sin utilizar la calculadora:

a) $\log_5 0{,}2$; b) $\log_{27} 3$; c) $\log_{0{,}5} 16$; d) $\log 3 \div \log 81$; e) $\log_9 25 \div \log_3 5$;

f) $\log 5 + \log 20$; g) $\log_2 3 \times \log_3 4$; h) $\log 2 - \log 0{,}2$; i) $\log_4 64 + \log_8 64$;

sol: a) -1; b) 1/3 c) -4; d) 1/4 e) 1; f) 2; g) 2; h) 1; i) 5

d) $\frac{\log 3}{\log 81} = \log_{81} 3 = \frac{1}{4}$

e) $\frac{\log_9 25}{\log_3 5} = \frac{\frac{\log_3 25}{\log_3 9}}{\log_3 5} = \frac{2 \cdot \log_3 5}{(\log_3 5) \cdot 2 \cdot \log_3 3} = \frac{2}{2} = 1$

g) $(\log_2 3) \cdot (\log_3 4) = \frac{\log_3 3}{\log_3 2} \cdot \log_3 4 = \frac{\log_3 3}{\log_3 2} \cdot \log_3 2^2 = \frac{\log_3 3}{\log_3 2} \cdot 2\log_3 2 = (\log_3 3) \cdot 2 = 2$

2º) Determina el valor de x.

a) $\log_{0,5} 2 = x$; b) $\log_2 x = -3$; c) $\log_x 25 = -2$; d) $10^{2 + \log 3} = x$; e) $\log_{\frac{1}{125}} 625 = -x$

sol: a) -1; b) 0,125; c) 0,2; d) 300; e) $\frac{4}{3}$

3º) Si log 2 = a, log 3 = b y log 7 = c , calcula:

a) log 6; b) log 49; c) log 5; d) $\sqrt{2}$; e) log 12; f) log 700; g) log 0,5; h) log 1,5

sol: a) a+b ; b) 2c; c) 1-a; d) 0,5a; e) 2a+b; f) c+2; g) -a; h) b-a

4º) Desarrolla aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) log 2ab   b) $\log \frac{3a}{4}$ c) $\log \frac{2\cdot a^2}{3}$

sol: a) log 2 + log a + log b   b) log 3 + log a − log 4   c) log 2 +2log a −log 3

5º) Reduce a un solo logaritmo:

a) $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y$ b) log p + log q − log r − log s

c) log (a + b) + log (a − b)   d) $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y + \frac{1}{4}\log z$

sol: a) $\log \sqrt{x \cdot y}$; b) $\log \frac{p\cdot q}{r\cdot s}$; c) $\log \frac{a+b}{a-b}$; d) $\log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[4]{z}}$

<u>REPASO DE RAÍCES</u>

1º) Simplifica:

a) $\sqrt[8]{a^4}$ b) $\sqrt[10]{b^8}$ c) $\sqrt[12]{x^3 \cdot y^6}$ d) $\sqrt[5]{a^{15}}$ e) $\sqrt[8]{\frac{2^4 \cdot 3^2}{5^2}}$

f) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ g) $\left(\frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^3}}\right)^{10}$ h) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \div \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ i) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}} \div \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ j) h) $\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^8$

<u>Sol</u>: a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt[5]{b^4}$ c) $\sqrt[4]{x \cdot y^2}$ d) a^3 e) $\sqrt[4]{\frac{12}{5}}$ f) 2 g) 4 h) $\frac{3}{2}$ i) $\frac{1}{2}$ j) 3^4

2º) Opera y simplifica:

a) $\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{6^2}}$ b) $\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$ c) $\left(2\sqrt{7}+2\right)\cdot\left(2\sqrt{7}-2\right)$

sol: a: $\sqrt[6]{2}$; b: $11\sqrt{5}$; c) 24

3º) Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ b) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ c) $\frac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

sol: a) $\frac{3-\sqrt{6}}{3}$ b) $2\sqrt{2}+1$ c) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2}$