EJERCICIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Dados $z_1 = -3+4i$, $z_2 = 5-2i$, $z_3 = \frac{3}{2}$ y $z_4 = 7i$, calcular:

a) $(z_1 - z_2)z_3$	**b)** $z_1z_4 + z_3z_4$	**c)** $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2}$	**d)** $z_1 + z_3^{-1}$	**e)** z_2^{-1}
f) $\overline{\overline{z_1 z_2}}$	**g)** $\left(\overline{z_1 + z_2}\right)^{-1}$	**h)** $z_1^2 z_3$	**i)** $\frac{z_2}{z_1}$	**j)** $\frac{z_1}{2z_3 + z_4}$

Solución

a) Para calcular $(z_1 - z_2)z_3$, en primer lugar se calcula la operación del paréntesis y a continuación se multiplica el resultado por z_3:

$$(z_1 - z_2)z_3 = \left(-3+4i - (5-2i)\right)\frac{3}{2} = \left(-3-5+(4+2)i\right)\frac{3}{2} = (-8+6i)\frac{3}{2} = -12+9i$$

b) En primer lugar se calculan z_1z_4 y z_3z_4 para después sumar los resultados:

$$z_1z_4 = (-3+4i)\,7i = -21i+28i^2 = -28-21i$$

$$z_3z_4 = \frac{3}{2}\,7i = \frac{21}{2}i$$

$$z_1z_4 + z_3z_4 = -28-21i + \frac{21}{2}i = -28-\frac{21}{2}i$$

Notar que otra forma de obtener este resultado es sacar factor común z_4 quedando:

$$z_1z_4 + z_3z_4 = (z_1 + z_3)z_4 = \left(-3 + 4i + \frac{3}{2}\right)7i = \left(\frac{-3}{2} + 4i\right)7i = \frac{-21}{2}i + 28i^2 = -28 - \frac{21}{2}i$$

c) En primer lugar se calcula la operación $z_1 + z_4 - 5z_2 = -3+4i + 7i - 5(5-2i) = -28+21i$ y después se calcula su conjugado, $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2} = -28-21i$

d) El inverso de z_3 es $z_3^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ y, por tanto, $z_1 + z_3^{-1} = -3+4i + \frac{2}{3} = \frac{-7}{3}+4i$

e) Para calcular el inverso de $z_2 = 5-2i$ se puede proceder de dos formas:

- mediante la definición: $z_2^{-1} = \frac{5}{5^2+(-2)^2} - \frac{-2}{5^2+(-2)^2}i = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$
- escribiéndolo como un cociente y efectuando la división multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5-2i} = \frac{1(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{5+2i}{25-4i^2} = \frac{5+2i}{29} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$$

f) Teniendo en cuenta que el conjugado del conjugado de un número es el propio número, es decir, $\overline{\overline{z_1z_2}} = z_1z_2$, se tiene $\overline{\overline{z_1z_2}} = z_1z_2 = (-3+4i)(5-2i) = -15+6i+20i-8i^2 = -7+26i$

g) En primer lugar, se realiza la suma de z_1 y z_2, después se calcula el conjugado de este resultado y finalmente el inverso de éste último:

$$z_1 + z_2 = -3+4i + 5-2i = -3+5+(4-2)i = 2+2i$$

2. Dados los números complejos $z_1 = 2-i$ y $z_2 = 3+6i$, determinar el número x que verifica cada una de las siguientes igualdades:

a) $z_1 + x = z_2$ **b)** $z_1^2\,x = 1$ **c)** $z_1 + z_2 + x = 1$ **d)** $z_2^2 + x = -z_1^2$ **e)** $z_2\,x = z_1$

Solución

a) Despejando x se tiene $x = z_2 - z_1 = 3+6i - (2-i) = 3-2+(6+1)i = 1+7i$

b) Despejando x se tiene $x = \frac{1}{z_1^2}$ que existe al ser z_1^2 no nulo.

Aplicando la fórmula del cuadrado de una diferencia, se tiene:

$$z_1^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i -1 = 3-4i$$

y calculando el inverso del resultado anterior queda

$$x = \frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{3-4i} = \frac{1(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{9-16i^2} = \frac{3+4i}{9+16} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

c) Despejando x se tiene $x = 1 - z_1 - z_2 = 1 - (2-i) - (3+6i) = 1 - 2 - 3 + (1-6)i = -4-5i$

d) Despejando x se tiene $x = -z_1^2 - z_2^2$. Calculando el cuadrado de z_1 y z_2 se tiene:

$$z_1^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3-4i$$

$$z_2^2 = (3+6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 = 9 + 36i - 36 = -27+36i$$

Así, $x = -z_1^2 - z_2^2 = -(3-4i) - (-27+36i) = -3 + 4i + 27 - 36i = 24-32i$

e) Al ser z_2 no nulo, se puede despejar x obteniéndose $x = \frac{z_1}{z_2}$. Para calcular este cociente se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$x = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{3+6i} = \frac{(2-i)(3-6i)}{(3+6i)(3-6i)} = \frac{6-12i-3i+6i^2}{9-36i^2} = \frac{6-15i-6}{9+36} = \frac{-15i}{45} = \frac{-1}{3}i$$

4. Determinar un polinomio de coeficientes reales de grado 4 que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$.

Solución

Teniendo en cuenta que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria tiene también su conjugada, las cuatro raíces del polinomio buscado son $-4i$, $4i$, $-5+2i$ y $-5-2i$.

Por tanto, el polinomio es cualquiera proporcional a:

$$(x-(-4i))\ (x-4i)\ (x-(-5+2i))\ (x-(-5-2i)) = (x+4i)\ (x-4i)\ (x+5-2i)\ (x+5+2i) =$$

$$= (x^2 - 16i^2)\ ((x+5)^2 - 4i^2) = (x^2+16)\ (x^2+10x+25+4) = (x^2+16)\ (x^2+10x+29) =$$

$$= x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 160x + 464$$

5. Dada una ecuación polinómica de grado 4 de coeficientes reales, responder a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuántas soluciones imaginarias puede tener si una de sus raíces es real?

b) Si $8i$ y $5-3i$, son dos soluciones, ¿cuáles son las otras soluciones?

Solución

a) Como el polinomio es de grado 4, tiene 4 raíces reales o imaginarias. Teniendo en cuenta que si tiene una raíz imaginaria tiene también su conjugada y que una de sus raíces es real, se deduce que este polinomio de grado 4 o no tiene raíces imaginarias o tiene 2.

b) Teniendo en cuenta que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria tiene también a su conjugada, las otras dos soluciones serán las conjugadas de las dadas, es decir, $-8i$ y $5+3i$.

7. Determinar el módulo, el argumento, la forma polar y la forma trigonométrica de los siguientes números complejos:

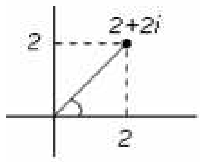
a) $2+2i$ **b)** $-2+2i$ **c)** $2-2i$ **d)** $-2-2i$ **e)** $-\sqrt{5}$ **f)** $\frac{5}{3}i$ **g)** $\sqrt{3}+i$

Solución

En todos los apartados se representa el número complejo para ayudar a determinar su argumento.

a) El módulo y el argumento de $2+2i$ son:

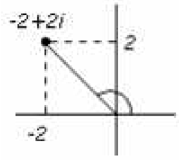
$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(2+2i) = \text{arctg}\frac{2}{2} = \text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar de $2+2i$ es $(2\sqrt{2})_{\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

b) El módulo y el argumento de $-2+2i$ son:

$$|-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(-2+2i) = \text{arctg}\frac{2}{-2} = \text{arctg}\,(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

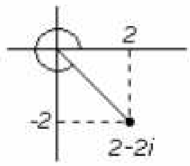


Por tanto, la forma polar y trigonométrica de $-2+2i$ son, respectivamente:

$$|-2+2i| = (2\sqrt{2})_{3\pi/4} \qquad |-2+2i| = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$

c) El módulo y el argumento de $2-2i$ son:

$$|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(2-2i) = \text{arctg}\frac{-2}{2} = \text{arctg}\,-1 = \frac{7\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar de $2-2i$ es $(2\sqrt{2})_{7\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

8. Determinar la forma binómica de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $1_{3\pi/4}$ **d)** $\sqrt{2}_{\pi/3}$

Solución

a) El número complejo $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ está dado en forma trigonométrica y para obtener su forma binómica basta hacer operaciones, así:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) El número complejo $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ está dado en forma trigonométrica y para obtener su forma binómica basta hacer operaciones, así:

$$3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 3\,(0+i1) = 3i$$

c) El número complejo $1_{3\pi/4}$ está dado en forma polar, para obtener su forma binómica basta escribir su forma trigonométrica y hacer operaciones, así:

$$1_{3\pi/4} = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

d) El número complejo $\sqrt{2}_{\pi/3}$ está dado en forma polar, para obtener su forma binómica basta escribir su forma trigonométrica y hacer operaciones, así:

$$\sqrt{2}_{\pi/3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\,i$$

9. Dados los números complejos $z_1 = 2-i$, $z_2 = 4_{\pi}$, $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ y $z_4 = 1-\sqrt{3}\,i$, realizar las operaciones que se indican a continuación expresando los resultados en forma binómica:

a) $z_1\,z_2$	**b)** $z_1 + z_3$	**c)** $z_4^{\,3}$	**d)** $z_1\,z_3$
e) $\frac{z_2}{z_3}$	**f)** $\sqrt{z_2}$	**g)** $z_2^{\,4}$	**h)** $\sqrt[3]{z_3}$

Solución

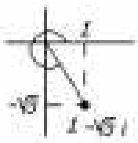
En este ejercicio hay que tener en cuenta que para realizar una operación entre dos números complejos, ambos deben estar escritos de la misma forma: binómica, polar o trigonométrica.

a) Expresando z_2 en forma binómica se tiene $z_2 = 4_{\pi} = 4(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi) = 4(-1+i0) = -4$, y multiplicando este resultado por z_1 se obtiene $z_1\,z_2 = (2-i)(-4) = -8+4i$.

b) Expresando z_3 en forma binómica queda $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$, y sumando este resultado con z_1 se obtiene $z_1 + z_3 = 2 - i + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}-2}{2}i$.

c) El cálculo de potencias de un número complejo se simplifica si éste se expresa en forma polar o trigonométrica.

Para calcular la expresión polar de $z_4 = 1-\sqrt{3}\,i$ es necesario calcular su módulo y su argumento:



$$|1-\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(1-\sqrt{3}\,i) = \mathrm{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = \frac{5\pi}{3}$$

y así la forma polar de $1-\sqrt{3}\,i$ es $2_{5\pi/3}$

Por tanto, $z_4^{\,3} = \left(2_{5\pi/3}\right)^3 = 2^3_{\;3.5\pi/3} = 8_{5\pi} = 8_{\pi}$

Y la expresión binómica del resultado es $z_4^{\,3} = 8_{\pi} = 8(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi) = 8(-1+0i) = -8$

d) La forma binómica de z_3, obtenida en el apartado b), es $z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$, y multiplicando este resultado por z_1 se obtiene:

$$z_1 z_3 = (2-i)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i^2 = \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

e) En este caso resulta más sencillo calcular el cociente en forma polar, para lo que se deben expresar numerador y denominador en dicha forma:

$$z_2 = 4_\pi$$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 3_{\pi/4}$$

y realizando la división queda $\frac{z_2}{z_3} = \frac{4_\pi}{3_{\pi/4}} = \left(\frac{4}{3}\right)_{\pi-\pi/4} = \left(\frac{4}{3}\right)_{3\pi/4}$

Expresando el resultado en forma binómica queda:

$$\frac{z_2}{z_3} = \left(\frac{4}{3}\right)_{3\pi/4} = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

f) Al estar z_2 expresado en forma polar, sus raíces cuadradas se pueden calcular de forma sencilla.

Las raíces cuadradas de $z_2 = 4_\pi$ son:

$$\sqrt{4}_{(\pi+2k\pi)/2} \text{ para } k = 0, 1 \text{ es decir, } 2_{\pi/2} \text{ y } 2_{3\pi/2}$$

La forma binómica de cada una de las dos raíces es:

$$2_{\pi/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2(0+i1) = 2i$$

$$2_{3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0+i(-1)) = -2i$$

Notar que en este caso al ser $z_2 = 4_\pi = -4$, un número real, su raíz cuadrada se puede calcular como sigue:

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\,\sqrt{-1} = \pm 2i.$$

g) Al estar z_2 expresado en forma polar, el cálculo de su cuarta potencia es inmediato,

$$z_2^4 = (4_\pi)^4 = 4^4{}_{4\pi} = 256_0$$

que expresado en forma binómica es $z_2^4 = 256_0 = 256(\cos 0 + i\,\text{sen}0) = 256(1+i0) = 256$

Como en el apartado anterior, notar que al ser $z_2 = 4_\pi = -4$, un número real, su potencia cuarta se puede calcular como sigue:

$$z_2^4 = (-4)^4 = 256$$

h) Como $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ tiene por expresión polar $z_3 = 3_{\pi/4}$, sus raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{3}_{(\pi/4+2k\pi)/3} \text{ para } k = 0, 1, 2 \text{ es decir, } \sqrt[3]{3}_{\pi/12},\ \sqrt[3]{3}_{9\pi/12} \text{ y } \sqrt[3]{3}_{17\pi/12}$$

La forma binómica de cada una de las tres raíces es:

$$\sqrt[3]{3}_{\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\text{sen}\frac{\pi}{12}$$

$$\sqrt[3]{3}_{9\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{9\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\text{sen}\frac{9\pi}{12}$$

$$\sqrt[3]{3}_{17\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{17\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{17\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\text{sen}\frac{17\pi}{12}$$